Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Les maths comme je les aime /12

Arithmétique : *(ro)bottes de sept lieues et lunettes à spectres*

Des entiers pas comme les autres !

Ce paragraphe s'appuie très librement sur l'introduction à l'arithmétique de mon livre « Mathématiques du cycle 4 : nombres et calculs (la vie des nombres, en toute indiscrétion) ». Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, je les effleure : ***je les raconte… comme je les aime****. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths.*

Dans l'épisode /5 (*et si les nombres n'étaient que des noms ?*) j'avais écrit « *observer un nombre, ce n'est en fait qu'observer un point sous un éclairage différent… tout est une question de lunettes : vous regardez un objet, avec certaines lunettes vous y voyez un point, avec d'autres lunettes vous y voyez un nombre* ».

Dans le deuxième paragraphe de l'épisode actuel je vous proposerai d'autres lunettes : si à l'œil nu vous voyez un entier naturel, avec ces lunettes vous verrez son « spectre ».

– Des entiers ***naturels*** *? Comme 0, 1, 2, 3… ? Mais on les a déjà vus à l'épisode /5, justement ! On a quand même dépassé ce stade, non ?*

Euh… oui et non : si vous voulez dire qu'on a dépassé le stade de l'école primaire, bien sûr qu'on l'a dépassé. Mais ce que je voudrais partager avec vous aujourd'hui c'est autre chose, quelque chose que vous n'avez vraisemblablement pas dépassé – et moi non plus parce que c'est à mon avis la branche la plus étrange et l'une des plus difficiles des maths : l'arithmétique.

– ***L'arithmétique*** *? Le calcul avec des nombres entiers ? C'est étrange et difficile, ça ? Vous venez vous-même de dire qu'on avait dépassé le stade de l'école primaire…*

Bon, ce n'est pas vraiment tout à fait la même arithmétique, au début de l'école primaire on apprend à calculer avec vos *0, 1, 2, 3…* mais c'est à peine la surface de l'arithmétique, il faut bien commencer, non ? Dès qu'on creuse ça se complique. Pas dans les questions qu'on se pose, la plupart semblent incroyablement simples – mais les réponses, c'est autre chose : des mathématiciens remarquables ont passé des années à réfléchir à ces questions, ils les ont retournées dans tous les sens et pourtant certaines n'ont toujours pas de réponse.

– Juste avec des 0, 1, 2, 3… ?

Juste avec des entiers naturels, oui. Tenez, par exemple, je pense à une question hyper-simple dont la réponse, si elle était « oui » créerait une panique financière, militaire, technologique sur toute la Terre !

– Euh… vous vous f… moquez de nous, là ? C'est quoi, cette question ?

Je vous la dirai tout à l'heure, promis, pour l'instant il vous manque encore un tout petit peu de vocabulaire, pas grand-chose. D'accord ?

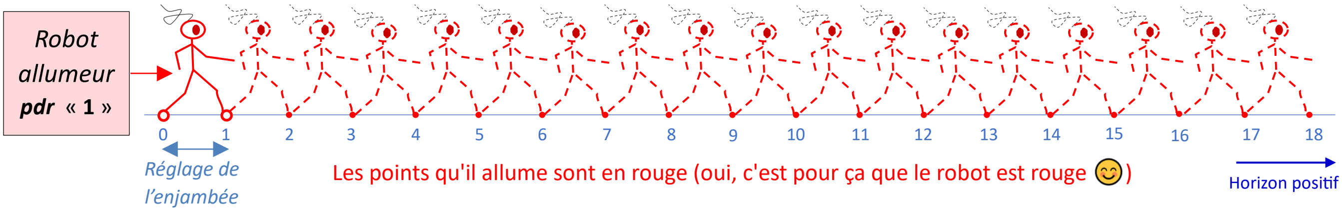
– Oui, d'accord, mais vous promettez ?

Oui, je promets ! On y va ?
Roulements de tambour… **arithmétique, introduction !**
Vous allez voir, la suite porte *uniquement* sur des nombres entiers, les plus simples des plus simples des nombres… enfin, apparemment !

Dans l'épisode /5, j'avais allumé deux points de l'espace comme point-origine et point-unité d'une graduation entière géométrique sur une droite, puis j'avais conçu un robot-arpenteur pour « allumer » les points-entiers de cette droite :

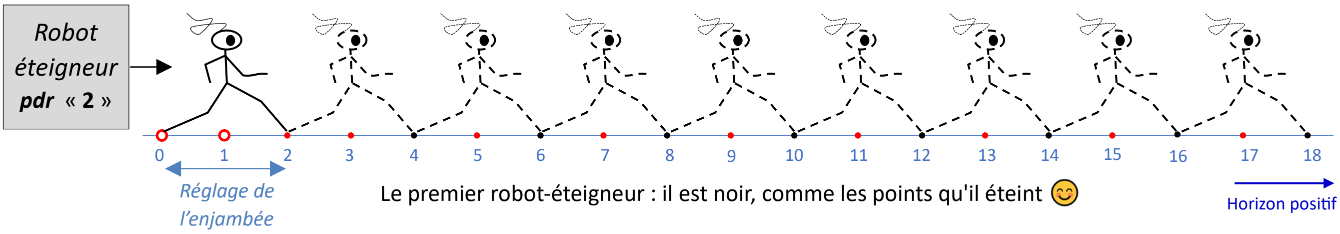
C'était un travail sans fin pour l'arpenteur : il avançait vers les positifs, reculait vers les négatifs, avançait encore – en même temps, il avait l'éternité !
Mais aujourd'hui, je vais le remplacer par des robots humanoïdes à enjambées réglables – **des robots aux bottes de sept lieues** (bon, pas nécessairement 7 !) et les faire uniquement *avancer* (puisque nous ne voulons que les entiers naturels) depuis le point origine vers l'horizon de la demi-droite positive. Au départ, chaque robot règle son enjambée avec un pied sur le point-origine et l'autre sur un point que j'appellerai son « **point de réglage** »… en abrégé « ***pdr*** ».

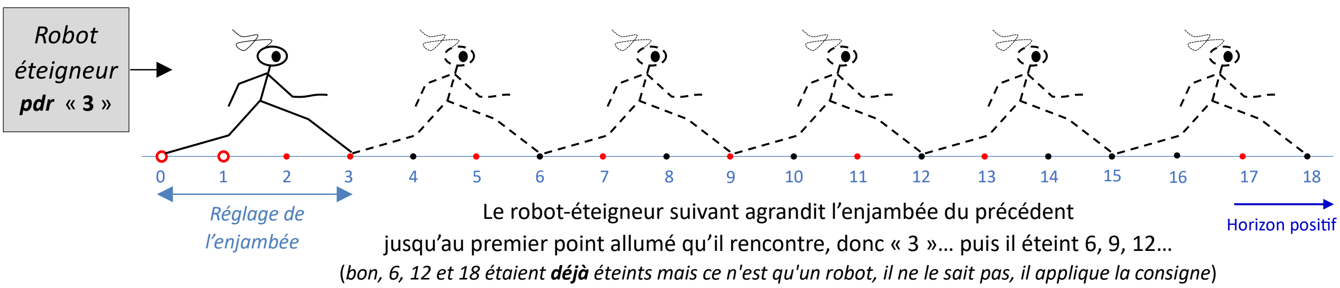
Le *pdr* du premier robot est le point-unité. À chaque nouvelle enjambée, il allume un point de la demi-droite.



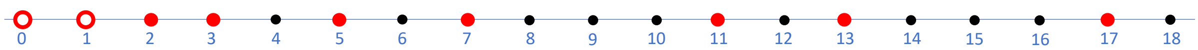
– C'est la même chose que dans l'épisode /5, alors ? On l'a déjà vu, pourquoi vous recommencez ? Sauf que cette fois ça rappelle un peu plus l'allumeur de réverbères dont vous aviez parlé… celui du Petit Prince !

Encore un tout petit peu de patience ! Maintenant qu'il y a une infinité de points allumés sur la demi-droite, voici le temps des robots éteigneurs : le *pdr* du premier est « 2 » (le premier point allumé après le *pdr* du robot-allumeur).
Ce robot éteint tous les points sur lesquels il marche – **après** son *pdr* :





Vous avez compris le principe, n'est-ce pas ? Le *pdr* du robot suivant sera « **5** > » et ce robot éteindra 5,10, 15… (oui, je sais, 10 et 15 étaient *déjà* éteints). Et le début de la demi-droite ressemblera à ceci :



Et vous découvrez avec émerveillement que les points entiers de la demi-droite positive ne jouent pas tous dans la même cour : 0 et 1 font bande à part – ou peut-être est-ce nous qui avons choisi de les isoler ? – puis nous voyons émerger une famille de points hors d'atteinte des éteigneurs (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17…) et enfin… les autres points !

– Avec émerveillement je ne sais pas mais oui, je pense que nous avons compris le principe : les points hors d'atteinte des éteigneurs, ce sont les entiers premiers, enfin, les « points premiers », pour parler comme vous. C'est ça ?

Oui, bien sûr que c'est ça. Et vous savez, « nombre » ou « point », je ne vais pas me battre pour ça : avec le contexte, lorsque je dis « 5 » vous voyez facilement si je parle du point ou de son abscisse. On s'y fait très bien, non ?

– Mais 0 et 1 ? Eux aussi ils sont hors d'atteinte… pourquoi est-ce que vous les isolez, qu'est-ce qu'ils vous ont fait ?

1 ne m'a rien fait… mais je ne dois surtout pas lâcher dans la nature un robot-éteigneur à ***pdr* 1** : à part 0 et 1 ***aucun*** des points entiers n'est hors d'atteinte pour lui ! Donc plus d'entiers premiers… et plus d'arithmétique ☹

Sans insister parce que ce n'est pas l'endroit (vous vous rappelez, ici je ***raconte*** les maths) : 1 est *neutre* pour la multiplication, ce qui veut dire que dans les multiplications, 1 ne se mouille pas, il refuse d'intervenir. Par exemple 17 × 1 ça reste 17 ! Je n'ai encore parlé dans aucun épisode des propriétés des opérations entre nombres mais ça viendra un jour !

Et 0 ? Lui, c'est le danger absolu : vous imaginez un robot robot-éteigneur à ***pdr* 0** (*les deux pieds* sur 0) ? Il serait bloqué sur 0, un peu comme un ordi qui plante.

0 est *absorbant* pour la multiplication, ce qui veut dire que si vous multipliez un nombre par 0, ce nombre est absorbé par 0 :
17 × 0 = slurp… 0 ! L'association « 0 et multiplication » est la terreur de tous les nombres, elle les vide de leur substance.)

– Mais pourquoi est-ce que vous parlez de multiplications ? Qu'est-ce qu'elles ont à voir avec vos robots ?

Et bien, elles ont TOUT à voir : par exemple le robot-éteigneur à ***pdr* 3** éteint tous les multiples de 3 (bon, d'accord, je n'ai pas non plus parlé des « multiples » ! Disons qu'il éteint tous les nombres de la table de multiplication par trois…) sauf 0 et 3, qui sont… les produits de 3 par **0** et **1** !

Vous ne trouvez pas qu'on progresse ? L'opération fondamentale de l'arithmétique, c'est la multiplication :

les entiers premiers sont ceux qu'on ne peut **pas** construire par multiplication (sauf par 1 mais justement lui, on l'a écarté) ! On ne les a pas appelés « entiers premiers » par hasard, ils constituent la matière première qui sera utilisée pour la construction – par multiplication – des *autres* entiers naturels… sauf naturellement 0 et 1 !

Et les autres entiers ? Euh, je viens de l'écrire : toujours à l'exception de 0 est 1, ils sont le résultat de multiplications entre entiers premiers… ce sont des « *entiers composés* » (d'entiers premiers) !

Comment ? 30, c'est 3 × 10 et 10 n'est pas un entier premier ? Non, c'est vrai mais 10 = 2 × 5 donc 30 = 3 × 2 × 5 : c'est un exemple de ce que beaucoup appellent la « décomposition en facteurs premiers » des entiers naturels !

Eh bien, un aveu : je suis un tout petit peu allergique à cette présentation par « décomposition ».

D'abord parce que « décomposition » est un terme plutôt morbide, ensuite parce cette « décomposition » sous-entend l'existence d'au moins une multiplication (qui « décompose » un entier en deux autres). Il serait donc plus juste de parler de la « décomposition en facteurs premiers des entiers naturels *non-premiers* »… mais comment sait-on si l'entier que nous observons est premier ou si nous devons lui appliquer un processus de « décomposition » ?

Enfin (et surtout !) parce que cette façon de regarder les entiers naturels est à l'origine d'une transcription répandue mais erronée du « théorème fondamental de l'arithmétique » (la proposition 31 du livreVII des éléments d'Euclide) :

« *tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs* ».

Bon, vous voyez bien que **cet énoncé est faux**, non ? 1 et les entiers premiers sont des entiers strictement positifs… et ils ne peuvent *pas* être écrits comme un *produit* de nombres premiers !

Alors je me suis penché sur les avantages d'un regard différent sur la composition des entiers naturels (composition, **pas** « décomposition »), d'une représentation *ensembliste* de cette composition. Et vous allez le voir, des avantages, cette représentation… elle en a ! Bon, je ne vais pas vous mentir, elle a tout de même un inconvénient, rien n'est parfait : pour l'utiliser, vous aurez besoin de « lunettes à spectres » ! Mais ce n'est pas trop grave, je vais vous en prêter – et ne vous inquiétez pas, ces spectres-là sont très gentils… et faciles à apprivoiser 😊.

Les spectres des entiers naturels !

Ce paragraphe s'appuie, lui, (et tout aussi librement que le précédent !) sur l'article « [les diviseurs d'un nombre, à partir de son spectre]() » que j'ai publié sur le site « [images des mathématiques (CNRS)]() ».

J'ai utilisé l'expression « spectre d'un entier naturel » pour la première fois au Canada en… 1974. Il y avait – ou il y a eu depuis – plusieurs variations mathématiques autour du mot « spectre », par exemple dans ces articles : [spectres RMN]() , [spectre d'un nombre](), [spectre](), [spectre numérique](), … mais à ma connaissance aucune à propos des entiers naturels alors j'ai tranquillement eu l'audace de m'approprier à la fois l'idée et l'expression ! 😊

Cette représentation ensembliste de la composition des entiers naturels n'a rien d'extraordinaire, elle aboutit simplement à une écriture plus dépouillée des éléments initiaux de l'arithmétique : lorsque dans des énoncés de base une approche est plus simple, plus « élégante » qu'une autre… ne vaut-il pas la peine de s'y intéresser ? Ne serait-ce qu'au niveau de la pédagogie ?

– Eh, oh, attendez, là ! « Ensembliste » ? Vous voulez nous ramener au « maths modernes » ?

Oui bien sûr, cette présentation demande de connaître les rudiments de l'écriture ensembliste. Et je sais bien que les « maths modernes » sont détestées par des tonnes de gens. Mais ce n'est pas leur faute, leur enseignement aurait pu être mieux préparé et… on a fini par jeter le bébé avec l'eau du bain. Oui je le regrette parce que ces maths-là étaient visionnaires : l'écriture ensembliste, la forme de pensée ensembliste sont à la base de toute la programmation. Mais tout ça, c'est du passé, n'est-ce pas. Si vous le voulez, je peux vous *raconter* les quelques mots dont j'aurai besoin ?

Oui, d'accord, ça serait gentil !

Alors c'est parti. Vous les *raconter*, pas vous les définir rigoureusement !

Un ensemble : imaginez que vous pensez simultanément à plusieurs objets, personnes, mots, nombres…
votre pensée est l'ensemble qui les contient tous (et chacun d'eux est un *élément* de cet ensemble).
Vous l'écrivez avec des accolades… et des virgules entre les éléments : P = {bonjour, 17, Serge}

Une partie d'un ensemble : un ensemble qui ne contient que des éléments du premier (depuis aucun jusqu'à tous !)

L'ensemble vide : un ensemble qui ne contient aucun élément (vous rêvassez dans le vide 😊)

La réunion de deux ensembles : c'est l'ensemble qui contient tous les éléments de ces deux ensembles.

L'intersection de deux ensembles : ça, c'est l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans les deux ensembles.

– Euh, c'est tout ?

Tout ? Non. Mais tout ce dont j'ai besoin ici, oui ! Allez, on y va pour trois écritures différentes du même entier :

par ses chiffres	par sa « décomposition »	par son « spectre »
0	n'existe pas	n'existe pas
1	n'existe pas	{ } (l'ensemble vide)
7 (entier premier)	n'existe pas	$\{ 7_a \}$
550	2 × 5 × 5 × 11	$\{ 2_a , 5_a , 5_b , 11_a \}$

Pourquoi ces indices « *a* » et « *b* » dans le spectre de 550 ? Si j'écrivais simplement { 2 , 5 , 5 , 11 } ce ne serait pas le spectre de 550 mais celui de 110 : { 2 , 5 , 11 }. Ce n'est pas parce que vous écrivez plusieurs fois le nom du même objet dans un ensemble que cet objet se dédouble, ça veut juste dire que vous avez écrit quelque chose d'inutile !
(J'aurais pu écrire 2 et 11 sans indices mais j'ai pensé qu'il était plus clair de toujours écrire l'indice. Maintenant bien sûr vous n'êtes pas obligés d'être d'accord avec moi !)

Ah oui… pourquoi le mot « spectre » ? Par analogie avec les ensembles de bandes verticales qui permettent par irradiation d'identifier des minerais sans les broyer (sans les « décomposer »), il m'a semblé naturel d'appeler « spectres d'entiers » les ensembles que je définis ici.

– Bon, d'accord, c'est amusant, mais pourquoi vous dîtes que c'est plus dépouillé, plus élégant que la décomposition ? Élégant, je ne sais pas mais plus dépouillé… avec les accolades et les indices je ne dirais pas ça !

C'est vrai mais quand je disais dépouillé, je pensais à la formulation des observations, pas à l'écriture du spectre.

Comme par exemple pour le théorème fondamental de l'arithmétique. Vous vous le rappelez (… avec ses erreurs) :
« tout entier strictement positif peut être écrit comme un produit de nombres premiers d'une unique façon, à l'ordre près des facteurs ».

… Avec les spectres, ça donne : ***tout entier strictement positif a un spectre unique***
(l'ordre d'écriture des éléments n'a pas d'importance dans un ensemble, donc sans s'occuper de l'ordre… et sans aucune erreur 😊)

Ou comme pour la définition classique d'un entier premier :
« un entier qui a exactement deux diviseurs (1 et lui-même »).

… Avec les spectres : *un entier dont le spectre est un singleton* (un singleton est un ensemble à 1 élément).

(Et non, ce n'est pas un sophisme : on peut imaginer que les premiers spectroscopes n'avaient pas « en mémoire » une liste d'entiers premiers et que pour tous les entiers qu'on leur demandait d'analyser ils devaient essayer de les diviser sans *a priori* par tous ceux qui les précédaient – bon, en fait jusqu'au premier qui dépassait leurs racines carrées mais on ne va pas *faire* de maths, d'accord ? Et puis avec une bonne programmation ou l'intelligence artificielle ils ont pu ensuite s'appuyer sur une liste !)

Mais ça ne s'arrête pas là : est-ce que 143 est un diviseur de 1287 ?

Sans calculatrice, ce n'est pas évident. Bon, je vais vous aider : j'ai bricolé des sortes de « lunettes à spectres » (un banal petit programme sur tableur, si vous avez Microsoft-Excel téléchargez-le ici, si vous avez Open-office-Calc c'est ici).
Si vous aviez ces lunettes à spectres, vous les feriez fonctionner :

Un nombre entier de 1 à 10000 …	et son spectre !	Un nombre entier de 1 à 10000 …	et son spectre !
143	{ 11a,13a }	1287	{ 3a,3b,11a,13a }

et ma question deviendrait : est-ce que $\{ 11_a , 13_a \}$ est une partie de $\{ 3_a , 3_b , 11_a , 13_a \}$? Facile, non ?

Pourquoi ? Parce que les spectres des diviseurs d'un entier sont les parties du spectre de cet entier. Et non, je ne développerai pas (mais si vous voulez aller plus loin, vous pouvez toujours lire mon article sur images des mathématiques 😊).

Évidemment, ça marche dans les deux sens : les spectres des multiples d'un entier sont tous des sur-ensembles du spectre de cet entier. Et ça met en évidence une énorme différence entre un entier premier et un entier composé : si un jour, par un sort maléfique, on « perdait » un entier composé ça ne serait pas dramatique, on pourrait toujours le reconstruire. Mais un entier premier on le perdrait pour l'éternité… et avec lui ses milliards de multiples.

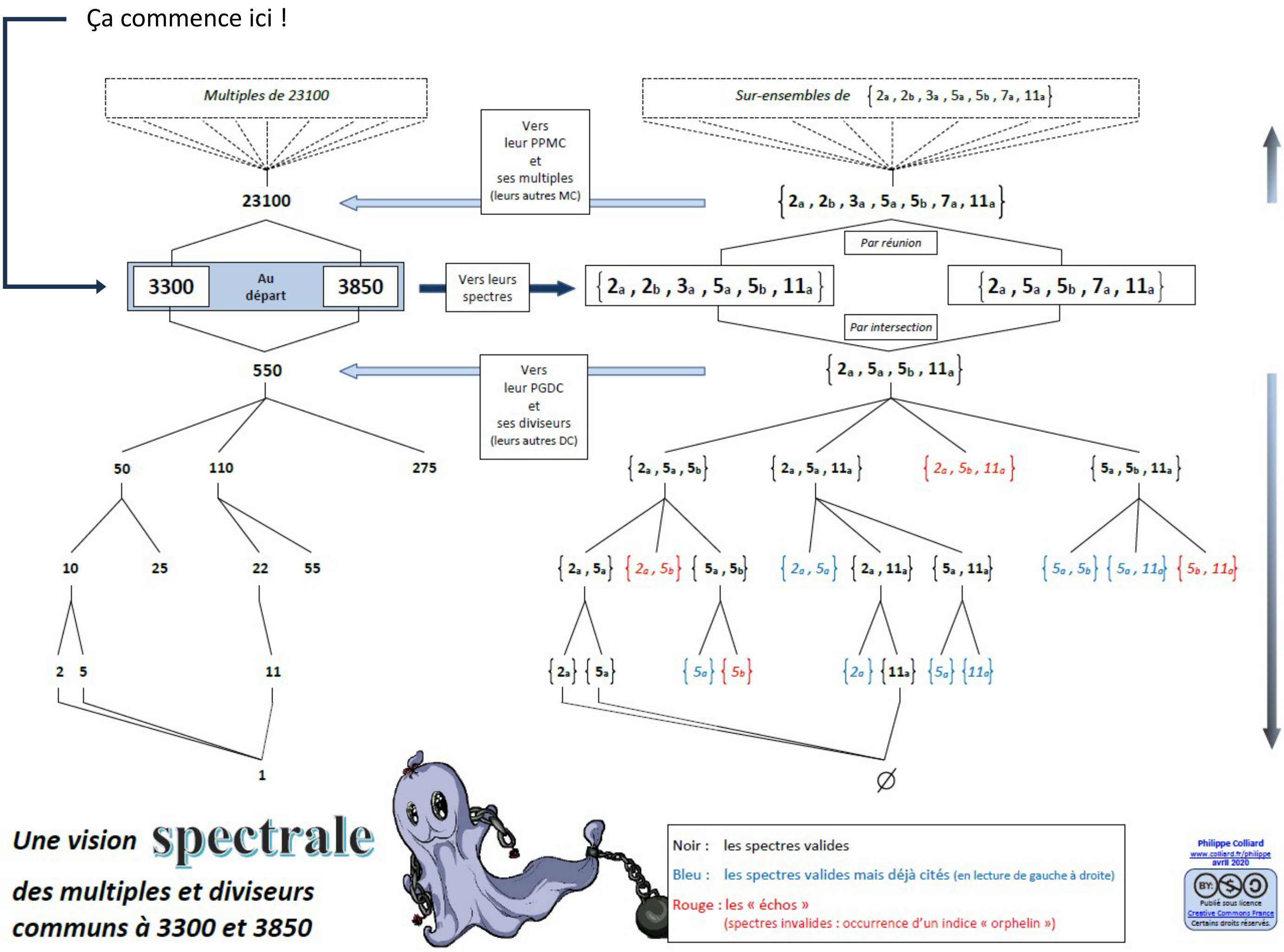
– Oh non ! Ça ce serait trop triste ! Euh… mais finalement, tout ça, ça sert à quoi ?

Tiens, vous êtes encore là, vous ? Ça sert à un tas de choses, en fait… ou à rien, c'est selon. À quoi ça sert de penser ? Bon, pour vous et moi, maintenant, ça sert surtout à préparer l'épisode suivant, qui répondra (enfin !) à la dernière question de l'*épisode /6 - des harpes aux points (et nombres) rationnels* : *avons-nous achevé d'allumer la droite **d** ?*

– D'accord, d'accord ! Et justement… à propos de questions ?

Je n'ai pas oublié ! La question qui bouleverserait tout, c'est : y a-t-il une logique dans la suite des entiers premiers ? (Peut-on, en observant les premiers entiers premiers, dire qui sera le suivant ?) Réponse… dans l'épisode /12*a*, qui ne devrait plus tarder 😊. Pour vous faire patienter, voici une application des spectres… juste *racontée*, évidemment :

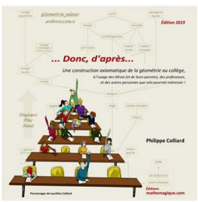
voici comment déterminer (et classer) par les spectres tous les diviseurs, tous les multiples communs à deux entiers.
(J'en ai détaillé la construction dans images des mathématiques : « *[les diviseurs d'un nombre, à partir de son spectre](#)* »)



(*Le dessin est de ma fille et je l'adore !*)

Une explication tout de même : les « échos » de spectres sont les ensembles qui contiennent des indices qui commencent en « *b* » ou qui comporte des trous (par exemple *a* et *c* mais pas *b*).
Pourquoi « échos » ? Parce qu'ils sont une déformation de spectres valides : lorsque j'écris sous un ensemble toutes ses parties, certaines d'entre elles semblent répéter un spectre valide… mais elles sont mal construites.

Mais j'arrête là, après ce ne serait plus *seulement* raconter des maths !



et

: [mes livres sont disponibles à la](#) fnac

J'essaie de partager :
en cliquant sur les couvertures vous accédez
(*entre autres*) à de nombreux extraits !
Et non, il n'y a aucun piège commercial, aucune
demande de renseignements…

… si toutefois vous voulez
acheter un de ces livres,
cliquez sur le logo Fnac !