



Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Les maths comme je les aime /8



Bien sûr que vous pouvez ajouter des points !

Comme les trois précédents (/5, /6 et /7) cet épisode s'appuie très librement sur l'article « [les harpes de Thalès](#) : une approche géométrique des nombres » que j'ai publié sur le site « [Images des mathématiques \(CNRS\)](#) ». Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, je les raconte... comme je les aime 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths !

De rien à... un peu plus : chaque nouvel épisode s'appuie sur les précédents pour raconter un peu plus de maths.

Vous pouvez même multiplier les points entre eux... mais ça, ce sera pour le prochain épisode 😊

Pas n'importe quels points : nous travaillons toujours sur les points de la droite d que j'ai définie dans les épisodes précédents à partir de deux points distincts A et B que j'ai allumés dans un espace tout noir. J'ai appelé « point origine d'une graduation géométrique de d » le point A , et « point unité » de cette graduation le point B .

Dans l'épisode /7 nous avons mis en place une relation d'ordre purement géométrique entre points de d , la relation « est devant... » – et comme vous insistiez pour qu'on s'intéresse aux nombres, je lui avais associé une relation numérique, « est supérieur ou égal à... » :

m et t étant deux nombres, et M et T étant les points de d dont ils sont les abscisses,
 $t \geq m$ signifie : T est devant M !

Bon, après avoir défini les nombres comme de simples attributs des points, puis une relation d'ordre entre nombres comme la simple transcription numérique d'une relation d'ordre entre points, n'est-il pas raisonnable de mettre en place une addition entre points puis de lui associer un alter ego numérique, l'addition telle que vous la connaissez ?

Vous allez voir, ça va vraiment se faire tout seul !

Mais d'abord vous voulez bien qu'on prenne un peu de temps pour clarifier les mots « relation » et « opération » ? Tout au moins dans le cadre des points de d (et donc bien sûr ensuite des nombres qui leur sont associés) ?

Relier deux points, c'est simplement les comparer l'un à l'autre selon un critère de notre choix (leur couleur, leur brillance, leur intérêt pour nous...) : c'est juste porter un regard sur eux, à leur insu.

Opérer sur deux points c'est les manipuler, se servir d'eux, les amener à l'aide de constructions géométriques à nous en désigner un autre, le « résultat » de l'opération sur ces deux points (oui, bien sûr, vous avez raison, ce résultat n'est pas nécessairement un autre point : il peut tout à fait être l'un des deux premiers... ou même ne pas exister !)

– Oui, bon, alors... cette addition entre points, vous la voyez comment ?

Tss tss... vous ne seriez pas un tout petit peu impatient(e)s ? D'accord, je la vois comme ça :

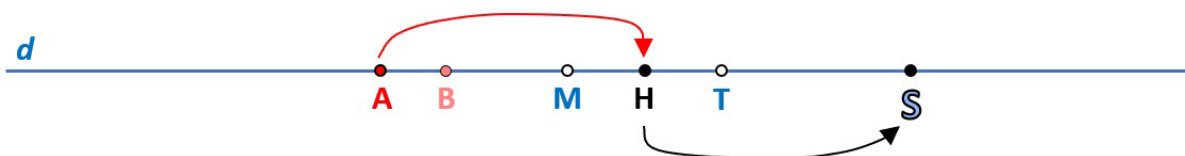
1 vous choisissez 2 points de d (appelons-les M et T) :



2 vous déterminez le milieu du segment $[MT]$... je l'appelle H :



3 vous déterminez le symétrique de A par rapport à H ... je l'appelle S :

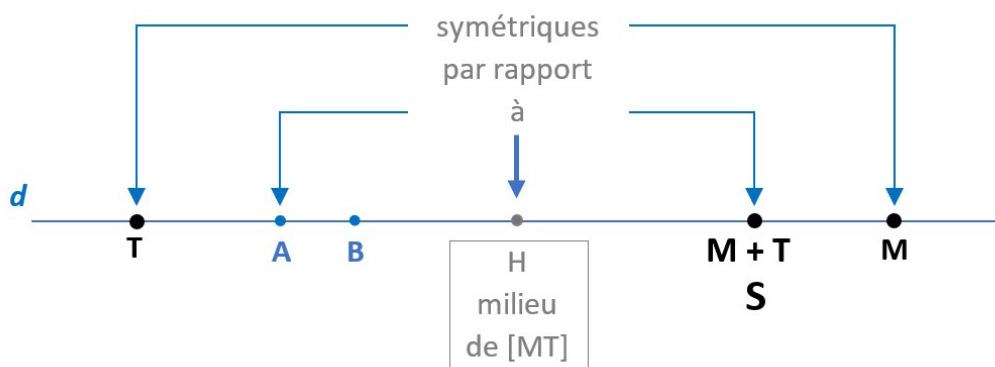


Et c'est tout ! Dans l'opération « addition entre points de d » que j'ai définie, S est la somme des points M et T 😊

Ah oui, un point important (je sais, le jeu de mots est vraiment facile) :

cette addition fonctionne pour n'importe quels points de d , qu'ils soient ou non dans la demi-droite positive de d ... et que nous les ayons déjà « débusqués » (les « points rationnels ») ou pas (tiens, il en existerait d'autres ? 😊)

Par exemple, dans le schéma résumé ci-dessous, M est un point positif et T un point négatif.



– Euh, vous fâchez pas, mais : comment vous faites pour déterminer le milieu de $[MT]$?

Dans l'épisode 5, quand vous avez parlé de l'arpenteur, vous avez écrit :

chacun des deux « petits » segments est congruent au segment $[AB]$ (encore une façon tordue de dire également que le point en noir est le milieu du segment... mais la notion de milieu repose sur celle de longueur – et donc de nombres, que nous ne connaissons toujours pas 😊 😊)

Alors ?

Si maintenant je commençais à me fâcher contre les personnes qui ont la gentillesse de lire mes textes ça serait grave, non ? Donc je me fâche pas du tout, c'est juste que je ne voudrais pas alourdir ces épisodes de trop de maths. Bon, très rapidement : j'ai utilisé « milieu » pour... faire simple mais en réalité dans l'article « les harpes de Thalès » j'ai présenté H comme le centre de symétrie de $[MT]$. Et j'ai précisé :

pourquoi le présenter comme un centre de symétrie plutôt que comme un milieu ?

Parce que pour la notion de symétrie la « congruence » (au sens de Hilbert) suffit alors que pour celle de milieu d'une ligne nous avons besoin des longueurs... et donc des nombres – que nous sommes en train de créer !

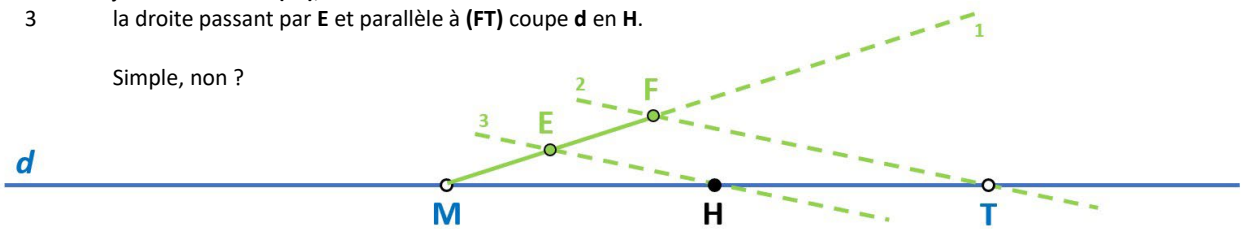
Mais évidemment ça ne vous avance pas beaucoup, il vous manque encore la notion de « segments congruents », définie par Hilbert dans son axiomatic. Un coup de chance, j'en parle au début de la deuxième page de l'épisode /5, alors, si ça vous tente...

– Bon, d'accord mais : comment vous le déterminez, comment vous le construisez, ce point H ? Sans rien mesurer ?

Ça, ce n'est pas vraiment sorcier, j'utilise les « harpes de Thalès » ! Ce n'est pas pour rien que c'est le titre de l'article :

- 1 Sur une demi-droite d'origine **M** (et non incluse dans **d** !) je dessine 2 segments adjacents congruents **[ME]** et **[EF]**,
- 2 je trace la droite **(FT)**,
- 3 la droite passant par **E** et parallèle à **(FT)** coupe **d** en **H**.

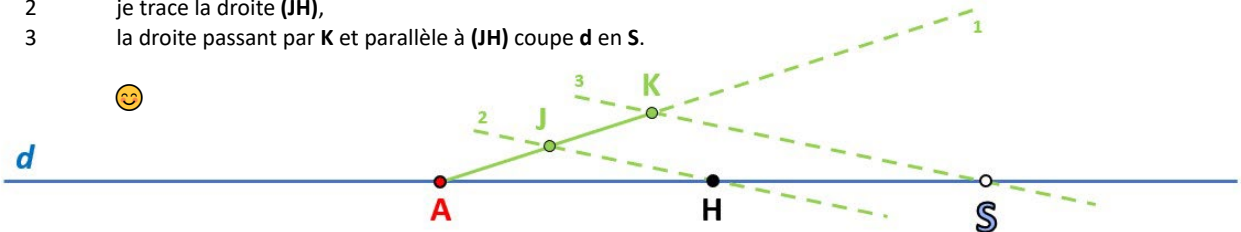
Simple, non ?



Et avant que vous me posiez la question (si, si, je sens que vous en aviez envie), pour construire S (le symétrique de A par rapport à H) je peux :

- ou bien considérer que **[HS]** est le segment de **d** adjacent et congruent à **[AH]**
- ou bien, même si ce n'est plus vraiment utile ici, utiliser à nouveau les « harpes de Thalès » :

- 1 Sur une demi-droite d'origine **A** (et non incluse dans **d** !) je dessine 2 segments adjacents congruents **[AJ]** et **[JK]**,
- 2 je trace la droite **(JH)**,
- 3 la droite passant par **K** et parallèle à **(JH)** coupe **d** en **S**.



– Bon, vous gagnez, vous avez vraiment construit une « addition » entre points, sans jamais utiliser de nombres...
MAIS qu'est-ce qu'elle a à voir avec la VRAIE addition, celle des nombres ?

Et bien... tout ! Regardez, je vais vous montrer quatre additions entre points (je vais garder les mêmes noms pour les quatre – mais ce ne sont évidemment pas les mêmes points ! Et je vous laisse vérifier les constructions 😊) :

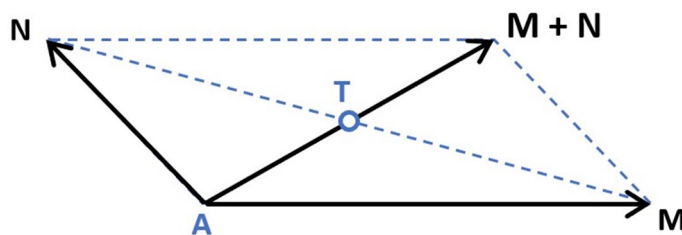
Si vous mettez vos « lunettes à points » vous verrez le dessin et la ligne au-dessus

... et si vous mettez vos « lunettes à nombres » vous verrez le dessin et la ligne au-dessous !

Pour ne pas compliquer inutilement la lecture, je me suis contenté de « points entiers »... mais c'est juste de la paresse !



Dans l'univers alternatif que je décris dans « *les harpes de Thalès* », l'invention de cette addition entre points aurait certainement été un événement majeur et son inventeur/inventeuse longuement glorifié... mais dans notre univers bien à nous (où loin d'être à l'origine des nombres les points ne sont souvent traités que comme des commodités associées à ces nombres) c'est tout au plus une adaptation amusante de la représentation géométrique classique d'une addition vectorielle :



Comme dans tout parallélogramme, les sommets opposés sont symétriques par rapport à T.

Il suffit donc « d'aplatir » ce parallélogramme sur d pour retrouver notre addition entre points d'une droite 😊

Une toute dernière remarque avant de nous quitter ?

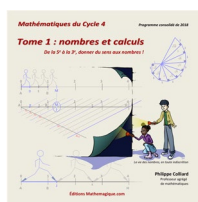
Je l'ai déjà écrit à la fin de l'épisode /5, l'intérêt majeur de définir l'addition numérique à partir de l'addition entre points est qu'il n'y a pas de séparation artificielle entre des points dont l'essence serait différente – positive ou négative – pas plus, d'ailleurs qu'entre des points entiers, rationnels, réels : un point est un point !

Parce qu'il s'agit d'une opération géométrique – entre points de la droite – et de démonstrations géométriques (*) de ses propriétés, cette addition est conçue dès le début pour s'appliquer dans les mêmes conditions à tous les points de la droite (que nous les ayons déjà « débusqués » ou non)... puis très simplement transposée aux nombres associés à ces points (je n'aurai donc pas besoin « d'inventer » des opérations spécifiques aux entiers naturels puis de réfléchir ensuite à comment les étendre aux entiers relatifs, puis aux nombres rationnels, puis encore aux nombres réels).

(*) Par exemple, pourquoi l'addition entre points (et donc également entre nombres) est-elle commutative ? Parce que le segment [MT] est le même que le segment [TM]... donc H est à la fois le centre de symétrie de [MT] et de [TM] !



et



: [mes livres sont disponibles à la](#) **fnac**