Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Les maths comme je les aime /8

Bien sûr que vous pouvez ajouter des points !

*Comme les trois précédents (/5, /6 et /7) cet épisode s'appuie très librement sur l'article « les harpes de Thalès : **une approche géométrique des nombres** » que j'ai publié sur le site « Images des mathématiques (CNRS) ». Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, **je les raconte… comme je les aime** 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths !*

De rien à… un peu plus : chaque nouvel épisode s'appuie sur les précédents pour raconter un peu plus de maths.

Vous pouvez même multiplier les points entre eux… mais ça, ce sera pour le prochain épisode 😊

Pas n'importe quels points : nous travaillons toujours sur les points de la droite ***d*** que j'ai définie dans les épisodes précédents à partir de deux points distincts **A** et **B** que j'ai allumés dans un espace tout noir. J'ai appelé « point origine d'une graduation géométrique de ***d*** » le point **A**, et « point unité » de cette graduation le point **B**.

Dans l'épisode /7 nous avons mis en place une relation d'ordre purement géométrique entre points de ***d***, la relation « *est devant…* » – et comme vous insistiez pour qu'on s'intéresse aux nombres, je lui avais associé une relation numérique, « *est supérieur ou égal à…* » :

m et **t** étant deux nombres, et **M** et **T** étant les points de ***d*** dont ils sont les abscisses,
t ≥ m signifie : **T** est devant **M** !

Bon, après avoir défini les nombres comme de simples attributs des points, puis une relation d'ordre entre nombres comme la simple transcription numérique d'une relation d'ordre entre points, n'est-il pas raisonnable de mettre en place une addition entre points puis de lui associer un alter ego numérique, l'addition telle que vous la connaissez ?

Vous allez voir, ça va vraiment se faire tout seul !

Mais d'abord vous voulez bien qu'on prenne un peu de temps pour clarifier les mots « relation » et « opération » ? Tout au moins dans le cadre des points de ***d*** (et donc bien sûr ensuite des nombres qui leur sont associés) ?

Relier deux points, c'est simplement les comparer l'un à l'autre selon un critère de notre choix (leur couleur, leur brillance, leur intérêt pour nous…) : c'est juste porter un regard sur eux, à leur insu.

Opérer sur deux points c'est les manipuler, se servir d'eux, les amener à l'aide de constructions géométriques à nous en désigner un autre, le « résultat » de l'opération sur ces deux points (oui, bien sûr, vous avez raison, ce résultat n'est pas nécessairement un *autre* point : il peut tout à fait être l'un des deux premiers… ou même ne pas exister !)

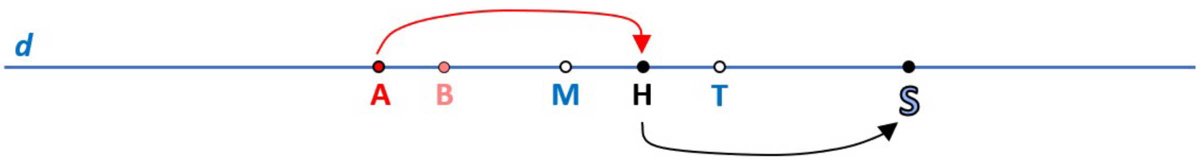
– Oui, bon, alors… cette addition entre points, vous la voyez comment ?

Tss tss… vous ne seriez pas un tout petit peu impatient(e)s ? D'accord, je la vois comme ça :

1 vous choisissez 2 points de **d** (appelons-les **M** et **T**) :

2 vous déterminez le milieu du segment **[MT]** … je l'appelle **H** :

3 vous déterminez le symétrique de **A** par rapport à **H** … je l'appelle **S** :

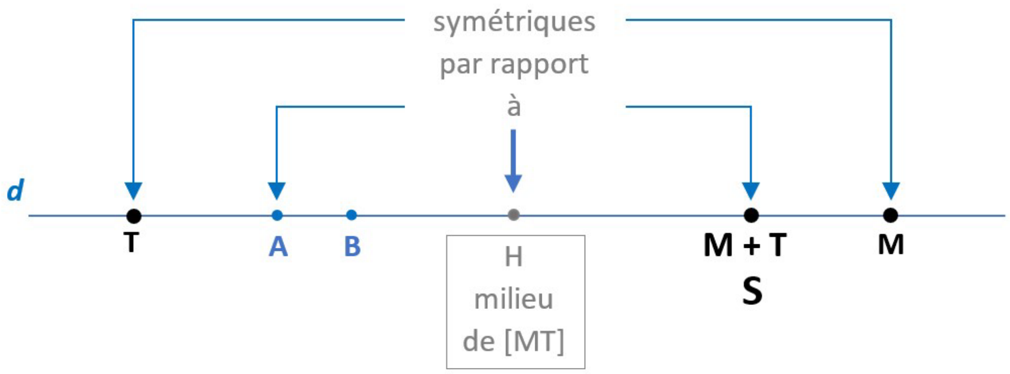


Et c'est tout ! Dans l'opération « *addition entre points de **d*** » que j'ai définie, **S est la somme des points M et T** 😊

Ah oui, un point important (je sais, le jeu de mots est vraiment facile) :

cette addition fonctionne pour n'importe quels points de ***d***, qu'ils soient ou non dans la demi-droite positive de ***d*** … **et** que nous les ayons déjà « débusqués » (les « points rationnels ») ou pas (tiens, il en existerait d'autres ? 😊)

Par exemple, dans le schéma résumé ci-dessous, M est un point positif et T un point négatif.



– Euh, vous fâchez pas, mais : comment vous faites pour déterminer le milieu de [MT] ?
Dans l'épisode 5, quand vous avez parlé de l'arpenteur, vous avez écrit :

chacun des deux « petits » segments est congruent au segment [AB] (encore une façon tordue de dire également que le point en noir est le milieu du segment… mais la notion de milieu repose sur celle de longueur – et donc de nombres, que nous ne connaissons toujours pas😊😊*)*

Alors ?

Si maintenant je commençais à me fâcher contre les personnes qui ont la gentillesse de lire mes textes ça serait grave, non ? Donc je me fâche pas du tout, c'est juste que je ne voudrais pas alourdir ces épisodes de trop de maths. Bon, très rapidement : j'ai utilisé « milieu » pour… faire simple mais en réalité dans l'article « *les harpes de Thalès* » j'ai présenté **H** comme le centre de symétrie de **[MT]**. Et j'ai précisé :

pourquoi le présenter comme un centre de symétrie plutôt que comme un milieu ?
Parce que pour la notion de symétrie la « congruence » (au sens de Hilbert) suffit alors que pour celle de milieu d'une ligne nous avons besoin des longueurs... et donc des nombres – que nous sommes en train de créer !

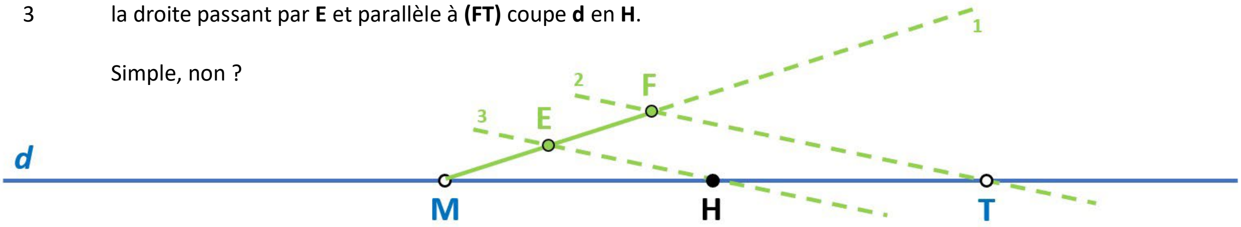
Mais évidemment ça ne vous avance pas beaucoup, il vous manque encore la notion de « segments congruents », définie par Hilbert dans son axiomatique. Un coup de chance, j'en parle au début de la deuxième page de l'épisode /5, alors, si ça vous tente…

– Bon, d'accord mais : comment vous le déterminez, comment vous le <u>construisez</u>, ce point H ? Sans rien mesurer ?

Ça, ce n'est pas vraiment sorcier, j'utilise les « *harpes de Thalès* » ! Ce n'est pas pour rien que c'est le titre de l'article :

1 Sur une demi-droite d'origine **M** (et non incluse dans ***d*** !) je dessine 2 segments adjacents congruents **[ME]** et **[EF]**,
2 je trace la droite **(FT)**,
3 la droite passant par **E** et parallèle à **(FT)** coupe **d** en **H**.

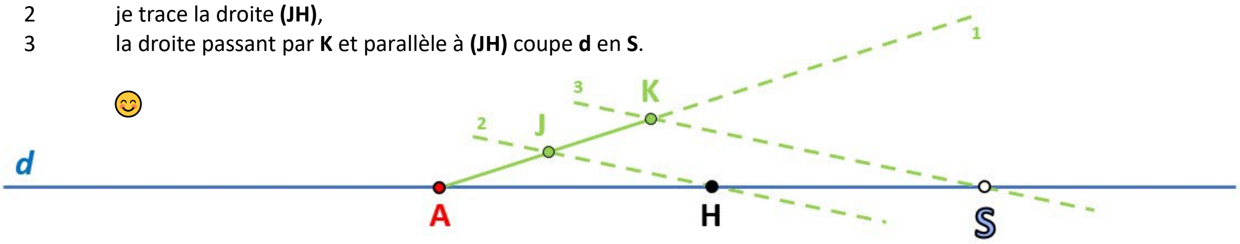
Simple, non ?



Et avant que vous me posiez la question (si, si, je sens que vous en aviez envie), pour construire S (le symétrique de A par rapport à H) je peux :

- ou bien considérer que [HS] est le segment de d adjacent et congruent à [AH]
- ou bien, même si ce n'est plus vraiment utile ici, utiliser à nouveau les « *harpes de Thalès* » :

1 Sur une demi-droite d'origine **A** (et non incluse dans ***d*** !) je dessine 2 segments adjacents congruents **[AJ]** et **[JK]**,
2 je trace la droite **(JH)**,
3 la droite passant par **K** et parallèle à **(JH)** coupe **d** en **S**.

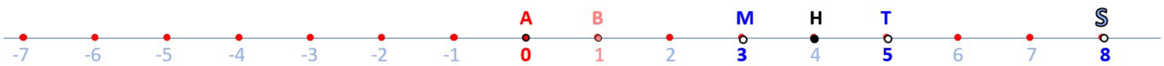


– Bon, vous gagnez, vous avez vraiment construit une « addition » entre points, sans jamais utiliser de nombres… MAIS qu'est-ce qu'elle a à voir avec la VRAIE addition, celle des nombres ?

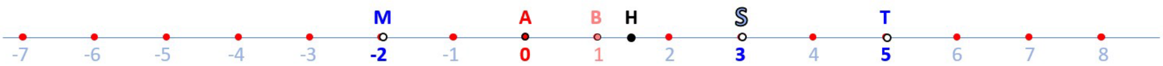
Et bien… tout ! Regardez, je vais vous montrer quatre additions entre points (je vais garder les mêmes noms pour les quatre – mais ce ne sont évidemment pas les mêmes points ! Et je vous laisse vérifier les constructions 😊) :

Si vous mettez vos « lunettes à points » vous verrez le dessin et la ligne au-dessus
… et si vous mettez vos « lunettes à nombres » vous verrez le dessin et la ligne au-dessous !
Pour ne pas compliquer inutilement la lecture, je me suis contenté de « points entiers »… mais c'est juste de la paresse !

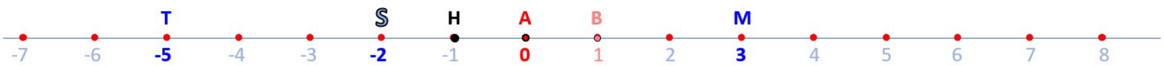
3 + 5 = 8



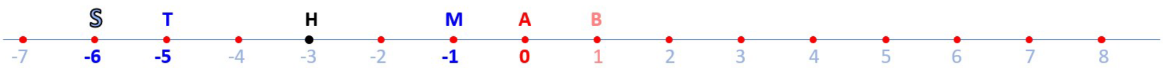
-2 + 5 = 3



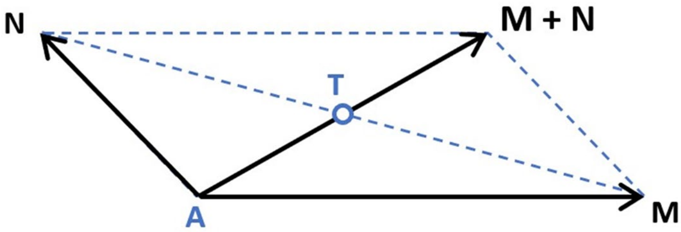
3 + (-5) = -2



-1 + (-5) = -6



Dans l’univers alternatif que je décris dans « *les harpes de Thalès* », l’invention de cette addition entre points aurait certainement été un événement majeur et son inventeur/inventeuse longuement glorifié… mais dans notre univers bien à nous (où loin d’être à l’origine des nombres les points ne sont souvent traités que comme des commodités associées à ces nombres) c’est tout au plus une adaptation amusante de la représentation géométrique classique d’une addition vectorielle :



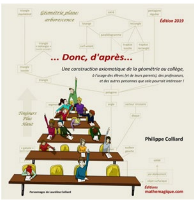
Comme dans tout parallélogramme, les sommets opposés sont symétriques par rapport à T.
Il suffit donc « d'aplatir » ce parallélogramme sur ***d*** pour retrouver notre addition entre points d'une droite 😊

Une toute dernière remarque avant de nous quitter ?

Je l’ai déjà écrit à la fin de l’épisode /5, l’intérêt majeur de définir l’addition numérique à partir de l’addition entre points est qu’il n’y a pas de séparation artificielle entre des points dont l’essence serait différente – positive ou négative – pas plus, d’ailleurs qu’entre des points entiers, rationnels, réels : un point est un point !

Parce qu’il s’agit d’une opération géométrique – entre points de la droite – et de démonstrations géométriques (*) de ses propriétés, cette addition est conçue dès le début pour s’appliquer dans les mêmes conditions à tous les points de la droite (que nous les ayons déjà « débusqués » ou non)… puis très simplement transposée aux nombres associés à ces points (je n’aurai donc pas besoin « d’inventer » des opérations spécifiques aux entiers naturels puis de réfléchir ensuite à comment les étendre aux entiers relatifs, puis aux nombres rationnels, puis encore aux nombres réels).

(*) Par exemple, pourquoi l’addition entre points (et donc également entre nombres) est-elle commutative ?
Parce que le segment [MT] est le même que le segment [TM]… donc H est à la fois le centre de symétrie de [MT] et de [TM] !



et

: mes livres sont disponibles à la fnac