Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Tous les épisodes publiés : [*https://www.lesmathscommejelesaime.fr*](https://www.lesmathscommejelesaime.fr)

Les maths comme je les aime /7

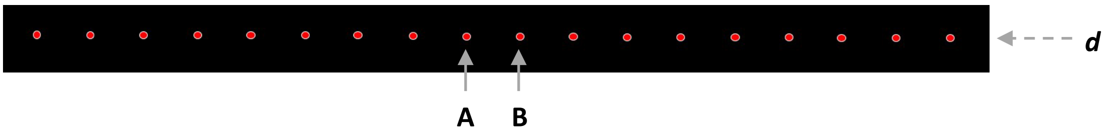
Tout ça manque un peu d'ordre, non ?

*Comme les deux précédents (/5 et /6) cet épisode s'appuie très librement sur l'article « les harpes de Thalès : **une approche géométrique des nombres** » que j'ai publié sur le site « Images des mathématiques (CNRS) ». Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, **je les raconte… comme je les aime** 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths !*

De rien à… un peu plus : chaque nouvel épisode s'appuie sur les précédents pour raconter un peu plus de maths.

Dans l'épisode /5 je suis parti d'un espace tout noir, j'en ai allumé deux points (je les ai appelés **A** et **B** parce que je n'ai pas beaucoup d'imagination) puis je me suis concentré sur la droite qui passait par ces deux points (oui, gagné, je l'ai appelée ***d*** !) Évidemment je ne la voyais pas, à part **A** et **B** tous ses points étaient éteints. Mais avec l'aide d'un robot-arpenteur, un lointain cousin de l'allumeur de réverbères du Petit Prince, j'ai pu allumer certains des points de ***d***. Oui, bon d'accord, une infinité… mais une toute petite infinité !
Et j'ai appelé « graduation entière » de ***d*** l'ensemble des points allumés… et « point entier » chacun de ces points. (Cette graduation entière avait comme « origine » le point **A**, et j'en avais appelé **B** le « point unité »).

Quelque chose comme ça :



Dans l'épisode /6 je m'étais servi des *harpes de lumière* pour allumer d'autres points dans chacun des espaces noirs entre deux points allumés : à chaque fois une petite infinité de nouveaux points… et j'ai appelé « point rationnel » chacun des points allumés de ***d*** (oui, même les points entiers).

Et ***d*** donnait l'impression d'être complètement allumée !

Bon, vous savez ~~peut-être~~ 😊 certainement que ce n'était pas vrai… et vous savez certainement aussi que même si elle était formée d'une infinité de petites infinités, l'infinité des points rationnels n'était pas du tout une nouvelle infinité : c'était la même que celle des points entiers ! Mais nous allons faire comme si vous ne le saviez pas, d'accord ?

Et maintenant, place à l'épisode /7 :

Maintenant que j'ai débusqué les « points rationnels » (et leurs alter ego, les nombres rationnels) d'une graduation géométrique de ***d***, j'ai deux progressions possibles :

ou bien creuser encore ***d*** à la recherche de points qui seraient encore éteints (non, ne riez pas, vous vous rappelez : nous allons faire comme si… !)

Ou bien au contraire prendre un peu d'altitude, décider qu'un point de ***d*** est un point de ***d***, que je l'aie allumé ou pas, et « inventer » des mécanismes de comparaison puis d'opération entre ces points (et remettre à plus tard la recherche d'éventuels points éteints de ***d***). Des mécanismes **applicables à tous les points** de ***d*** : si plus tard de nouveaux points se… pointent, ils s'y plieront comme les autres.

[Pourquoi « inventer » entre guillemets ? Parce que j'ai toujours dans ma tête cette idée que les points de ***d*** (et donc les nombres qu'ils traînent avec eux) ont une vie bien à eux, avec des codes et des lois qui ne dépendent que d'eux : je ne fais que les observer en voyeur. C'est même la légende de l'illustration de couverture de mon livre « mathématiques du cycle 4, tome 1 : nombres et calculs) : ***la vie des nombres, en toute indiscrétion***… et si je ne précise pas que cette ***magnifique*** illustration est l'œuvre de ma fille Lauréline elle va m'en vouloir !]

J'ai décidé de privilégier cette deuxième progression.
(Comme tout choix personnel, celui-ci se discute. Peut-être le ferai-je dans un épisode /7a ?)

Donc au menu d'aujourd'hui : **<u>comment comparer deux points de *d*</u> ?**

Mais ça veut dire QUOI, comparer deux points de ***d*** ?
Qu'est-ce qu'on compare ? Leur couleur, leur âge, leur brillance ? … 😕 ? ?

Rien de tout ça, évidemment. En réalité, dire que je compare deux points de ***d*** est un abus de langage, une facilité que je me donne, parce que ce ne sont pas les points que je compare mais leurs positions sur ***d*** :

lorsque **M** et **T** sont deux points distincts de ***d***, je me demande **<u>lequel est devant l'autre</u> ?**
(Mathématiquement, une question plus précise serait : l'un des deux est-il devant l'autre, et si oui, lequel ? … Mais bon on ne va pas chicaner !)

Facile, me dites-vous : *puisqu'à chaque point de **d** j'ai associé un nombre il suffit de comparer ces nombres… de dire lequel est le plus grand !*

Bien sûr, bien sûr… excepté que :

- même si nous « faisons comme si », vous savez bien que je n'ai **pas** allumé tous les points de ***d***, il en existe encore une **énorme** infinité que je n'ai encore débusquée par aucune construction – et ces points-là n'ont donc pas encore de nombres,
- et même si j'avais privilégié l'autre progression et allumé tous les points de ***d*** avant de vouloir les comparer je n'aurais pas pu m'appuyer sur la comparaison des nombres qui leur sont associés : comparer deux nombres repose sur une *opération* entre ces nombres (la soustraction). Mais nous n'avons pas encore découvert les opérations entre nombres… qui ne seront d'ailleurs pour nous qu'une lecture numériques des opérations entre points. Mais oui, les opérations entre points, ça existe, ce sera même le sujet du prochain épisode !

Comment ? Je complique toujours tout ? Mais non, pas du tout, vous verrez, j'essaie même de simplifier 😇.
Alors, vous refaites un essai ?

Euh… quand ils regardent vers l'avant, celui des deux qui voit l'autre ?

Pas mal. Pas mal du tout – sauf que celui qui est devant, ce serait celui qui *ne voit pas* l'autre, mais l'idée y est (enfin, si nos points ont des yeux… et si ces yeux sont directionnels) ! Il reste juste un minuscule détail à régler :

qu'est-ce que vous entendez par « regarder <u>vers l'avant</u> » ?

Vous appelez ça « simplifier », vous ? On voit bien que vous faites des maths ! … Regarder vers l'infini positif ? Non, vous allez encore me dire qu'on n'a jamais défini d'infini positif… regarder vers l'infini de la demi-droite positive ?

Quelque chose comme ça, oui. Vous voyez bien que vous aussi vous faites des maths 😁 ! Il ne reste plus qu'à traduire ça en langage mathématique. Et vous aviez raison, tout à l'heure : c'est facile. C'est même très facile, vous allez voir – et ensuite vous ne direz plus que je complique tout ?

Dans « *les harpes de Thalès* » j'ai proposé deux méthodes de comparaison entre points de ***d***, l'une plutôt « locale », l'autre… plus générale. Comme j'ai un faible pour cette seconde méthode, c'est celle-là que je vais vous développer. Elle repose sur trois définitions hyper-simples :

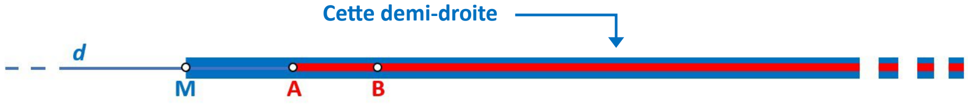
- <u>une définition classique</u> (nous l'avons déjà vue) :

  j'appelle « demi-droite positive de ***d*** » ou « demi-droite principale »
  la demi-droite d'origine **A** et passant par **B**.
  (Elle ne le sait pas encore mais c'est elle qui va définir un sens sur ***d*** 😊)

- <u>une seconde définition, plus personnelle</u> :

pour n'importe quel point M de *d*,
j'appelle « demi-droite positive associée à **M** »
la demi-droite d'origine **M** qui, selon la position de **M**…

… ou bien contient la demi-droite principale



… ou bien est contenue par elle.

[Pour les perfectionnistes, une autre rédaction, plus concise :
… la demi-droite d'origine **M** qui, *à un segment près*, contient la demi-droite principale. 😊]

Vite fait, trois toutes petites remarques :

« demi-droite positive de ***d*** » , « demi-droite principale » et « demi-droite positive associée à **A** » ne sont donc que trois façons différentes de parler de la même demi-droite. La troisième met en avant un point de vue *depuis* **A**, à qui elle associe un « côté positif ».

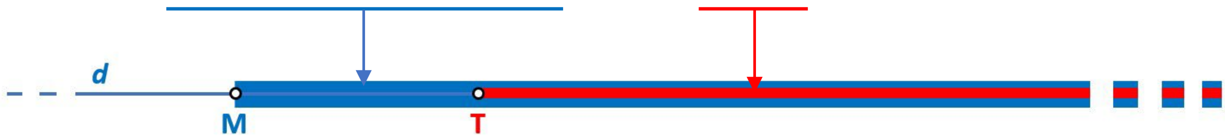
La définition de « demi-droites positives relatives à un point » étend cette notion de « côté positif » à chacun des points de ***d*** : par une sorte de contamination la demi-droite positive de **A** (demi-droite <u>principale</u> de ***d***) impose à chaque point « le même côté positif » qu'à **A** (et la même demi-droite positive… plus ou moins un segment !).

Peut-être voyez-vous la notion de « sens » pointer le bout de son nez ? Il y a la même idée derrière toutes ces demi-droites positives que je définis : si le point origine de chaque demi-droite regarde vers les points de sa demi-droite, tous ces points origines regardent dans le même sens.
(Ce n'est pas une définition mathématique du « sens » d'une droite : le regard d'un point, ce n'est pas très mathématique… mais qui vous empêche d'en avoir cette *interprétation*, si vous la trouvez pratique ?)

- <u>Et maintenant la troisième définition</u> ! Avec elle la notion de comparaison va prendre tout son… sens :

pour n'importe quels points distincts M et T de *d*,

si la « <u>demi-droite positive associée à **M**</u> » contient <u>celle de</u> **T**, nous dirons que **T est devant M** …



et sinon que **M** est devant **T** (puisque ce sera la demi-droite positive associée à **T** qui contiendra celle de **M**)

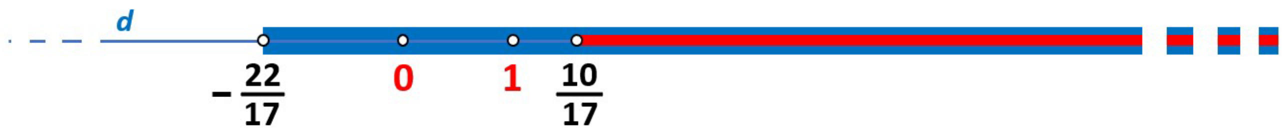
Joli, non ? Vous pouvez le vérifier, ça vous permet de classer entre eux (d'ordonner) tous les points de ***d*** !

Ça vous permet même de classer un point par rapport à lui-même si on remplace « est devant » par « n'est pas derrière », ce qui en maths se dirait plutôt « est ou devant lui, ou lui-même » pour éviter d'introduire une négation dans une définition…
et vous retrouvez le pendant ponctuel du classique « est supérieur ou égal à » ! Je n'ai pas voulu insister là-dessus dans les lignes précédentes pour ne pas m'entendre encore dire « on voit bien que vous faites des maths » avec un ton tout à fait réprobateur :
je vous propose donc de faire comme beaucoup de personnes, de décider que si on ne le précise pas, « devant » signifie en fait « devant… ou lui-même », tout comme ces mêmes personnes lisent souvent « est supérieur à » pour le signe « ≥ » !

Alors, vous trouvez toujours que je complique tout ? Non, ne répondez pas ça risquerait de fâcher l'un(e) de nous !

Et les nombres, là-dedans ?

Ce n'est pas évident ? Si maintenant vous regardiez le dessin précédent avec des « lunettes à nombres » (*) qui associent aux points leurs alter ego numériques (leurs abscisses), vous verriez quelque chose comme ça :



En définissant la relation « est supérieur ou égal à » entre nombres comme ceci :

> **m** et **t** étant deux nombres, et **M** et **T** étant les points de ***d*** dont ils sont les abscisses,
> **t ≥ m** signifie : **T** est devant **M** !

… nous dotons en deux petites lignes l'ensemble numérique d'une relation d'ordre dans laquelle $\frac{10}{17} \geq -\frac{22}{17}$

Un rappel : de cet ensemble numérique nous ne connaissons pour l'instant que les rationnels, puisque nous n'avons encore allumé que les points rationnels de ***d***. Mais la relation d'ordre que nous venons de mettre en place n'est limitée ni aux points rationnels ni à leurs alter ego numériques : si par hasard (non, ne riez pas !) nous découvrions un jour d'autres points de ***d*** (et de nouvelles écritures pour leurs abscisses) elle les accueillera sans difficultés.

*** *** *** *** ***

(*) J'en ai déjà un tout petit peu parlé dans l'épisode /5 :

… observer un nombre, ce n'est en fait qu'observer un point sous un éclairage différent. Ou si vous le préférez que chaque point traîne son nombre derrière lui, comme… son ombre 😊.

Ou encore : tout est une question de lunettes : vous regardez un objet, avec certaines lunettes vous y voyez un point, avec d'autres lunettes vous y voyez un nombre. Si par hasard vous avez lu « les diviseurs d'un nombre, à partir de son spectre » – toujours dans images des mathématiques – ça vous rappellera peut-être quelque chose ?

(Et j'y reviendrai vraisemblablement un jour à propos de l'arithmétique !)

*** *** *** *** ***