Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Tous les épisodes publiés : [*https://www.lesmathscommejelesaime.fr*](https://www.lesmathscommejelesaime.fr)

Les maths comme je les aime /6

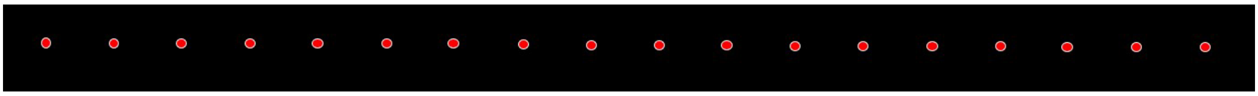
Des harpes aux points (et nombres) rationnels

*Comme le précédent (/5) cet épisode s'appuie très librement sur l'article « [les harpes de Thalès](#) » que j'ai publié sur le site « [Images des mathématiques (CNRS)](#) » : **une approche géométrique des nombres**. Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, **je les raconte… comme je les aime** 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths !*

Vous vous rappelez le robot-arpenteur de l'épisode précédent ([*/5 Et si les nombres n'étaient que des noms ?*](#)) ? Le lointain cousin de l'allumeur de réverbères du Petit Prince qui, comme lui, allume sans se poser de questions, parce que c'est la consigne. Sauf que lui, bien sûr, il n'allume et n'éteint pas constamment le même réverbère (jour, nuit… jour, nuit…), il passe son éternité à allumer des points différents d'une même droite. Des points que j'ai appelés « points-entiers ».

Ah non, ne commencez pas à chicaner, nous savons très bien, vous et moi, qu'on ne peut pas allumer un point. Parce qu'un point, ce n'est qu'un endroit : l'arpenteur, « allume » un point en lui introduisant un objet ponctuel brillant.
(Je suis peut-être un peu grognon ces temps-ci, ça doit être l'âge… alors excusez-moi si je m'énerve à tort : peut-être n'avez-vous *vraiment* pas lu l'épisode 4. En ce cas, s'il vous plaît, lisez-le : cet épisode en est la suite !)

Bon, bref, à partir de deux points de l'espace que j'avais obligeamment allumés pour lui, il en avait à son tour allumé une infinité d'autres – tous des points de la droite qui contenait les deux premiers. Le résultat était quelque chose comme ça :



(Imaginez-les sur le fond noir d'un espace vide : un immense ruban d'étoiles dans votre univers géométrique !)

Et à chacun de ces points nous avons associé une carte d'identité, un « nombre » qui porte en lui une construction logique qui nous permet d'identifier le point à partir des deux premiers points que j'avais allumés.

Mais ces points allumés ne sont encore que quelques points de la droite que j'ai choisie (en en allumant deux points), ses « points-entiers ».

Comment allumer d'autres points de cette droite – autrement que d'une façon aléatoire, qui ne nous permettrait de les identifier qu'en les désignant ?

Laissons le robot-arpenteur continuer à allumer ses points-entiers (il a le temps, il a l'éternité pour lui). De notre côté il nous faut maintenant penser plus finement, inventer un mécanisme différent qui allumera à son tour de nombreux nouveaux points. Un mécanisme dont la logique nous permettra d'associer à chacun d'entre eux un nouveau nombre – sa carte d'identité.
Et cette carte d'identité devra évidemment s'appuyer sur le mécanisme utilisé pour atteindre ce point, pour que nous puissions encore le retrouver, l'identifier à partir des deux points initiaux de notre graduation.

Ce mécanisme, c'est un *théorème* ! Non, ne partez pas tout de suite, ne fuyez pas ! Ce mot est quasiment devenu une grossièreté (à tel point qu'il n'apparaît plus que deux fois, il me semble, dans les programmes officiels du collège) et je ne voudrais pas vous choquer par mon vocabulaire… mais vous voulez bien faire une toute petite exception pour ce théorème-là ? Vous verrez, il en vaut la peine – et puis, je vous l'ai dit, ici je n'écris pas des maths, je les raconte !

Alors je vais vous le *raconter* ! Et pour commencer je vais lui donner un nom parce que vraiment, il le mérite (les maths sont remplies de théorèmes sans noms, des théorèmes qu'on doit décrire ou citer en entier à chaque fois qu'on a besoin de s'en servir et c'est… c'est un peu insultant pour eux, non ?)

Pourquoi est-ce qu'il « mérite » un nom ? Parce que tout un pan de l'étude des nombres repose sur lui – et aussi parce qu'il est incroyablement simple. Je l'ai appelé le « ***théorème des harpes de Thalès*** ».

Pourquoi ? Et qu'est-ce qu'il *raconte* ?

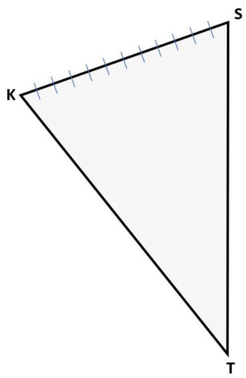
Commençons par ce qu'il raconte. Bon, là, je vais un tout petit peu tricher et parler de la « longueur » d'un segment : en toute rigueur, je n'en ai pas le droit parce que la notion de longueur s'appuie sur celle de nombres… et nous commençons à peine à les inventer, nous ne connaissons encore que les entiers ! Mais puisque je vous *raconte* le théorème je n'ai pas vraiment besoin d'être rigoureux, l'important c'est qu'on se comprenne !
(Petit rappel : si vous voulez des maths *vraiment* rigoureuses, c'est ici : *les harpes de Thalès* 😊)

Donc, le **principe** du *théorème des harpes de Thalès* :

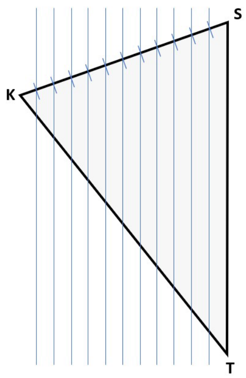
vous prenez un triangle, n'importe quel triangle,
par exemple celui-ci (ses sommets sont les points K, S et T),
et vous séparez l'un de ses côtés – par exemple [KS] –
en plusieurs segments qui ont tous la même longueur :

Mais *comment* séparez-vous un segment en plusieurs segments de même longueur ?

Bon, ici je *raconte*, d'accord ?



Puis vous choisissez un deuxième côté – par exemple [ST] – et vous imaginez les droites parallèles à (ST) et qui passent par les points de séparation de [KS] :



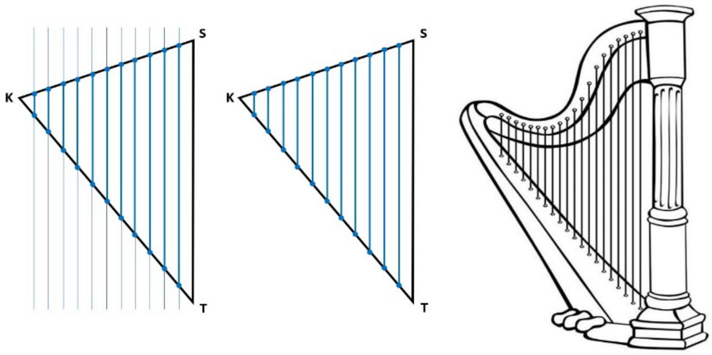
Eh bien oui, le théorème raconte que ces droites découpent le troisième côté – donc [KT] – en segments qui ont également tous la même longueur (mais en général pas la même longueur que les petits segments de [KS]) ! Vous l'aviez sûrement deviné !

C'est un théorème, ça ? Oui bien sûr, et drôlement utile !

Un théorème, après tout, c'est simplement une affirmation dont on a réussi à démontrer qu'elle était vraie.
Et la beauté de celui-ci, c'est que sa démonstration est vraiment mais alors vraiment très simple (non, je ne l'écrirai pas ici, mais vous pouvez la trouver dans *les harpes de Thalès*, c'est la note 4, la dernière, tout en bas de l'article d'*Images des mathématiques*) !

Et maintenant, pourquoi « *théorème **des harpes*** » ?

C'est évidemment très personnel…
mais si de l'ensemble des droites parallèles à **(ST)** vous ne gardez que les segments qui traversent le triangle, cela vous semble-t-il si déraisonnable ?



😊 **Vous y croyez, vous ?** 😊

J'avais pensé que « ***les harpes de Thalès*** », ça serait un joli titre pour mon article sur « Images des mathématiques »… un article *sur les maths* !

Eh bien j'ai découvert qu'à la même époque (à *peut-être* 50 ans près) et au même endroit (à *peut-être* 200 km près) vécurent **deux Thalès** :
Thalès de Milet – celui des maths et du théorème (et très accessoirement de mon article)
… et **Thalès de Crête** (ou « de Candie ») – poète et musicien, ***qui fut appelé à Sparte pour y conjurer la peste en y jouant de la harpe !***

Comment ? « Théorème » d'accord, « des harpes » d'accord aussi… mais pourquoi « de Thalès » ? Qu'est-ce qu'il a à voir avec le théorème de Thalès, à part qu'il y a des parallèles dans un triangle ?

Eh bien, il a *tout* à voir ! En fait, il annonce le théorème de Thalès, il en est une forme primitive. Pourquoi primitive ? Parce qu'elle est restreinte à un univers dénombrable… mais « restreinte » est un mot un peu violent : ce théorème primitif va tout de même nous permettre d'allumer énormément de nouveaux points de la droite – et d'attribuer un nombre « logique » à chacun d'entre eux !

Les harpes de lumière :

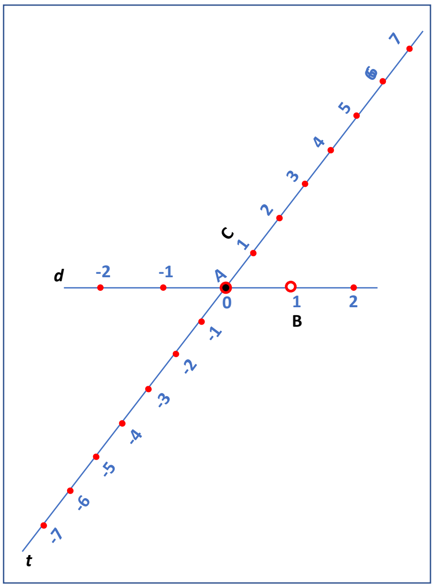
pour l'expliquer, je vais tout de même avoir besoin de m'appuyer sur quelques définitions de l'épisode précédent :

l'ensemble des points que nous avons déjà allumés forme une « *graduation entière* » de la droite à laquelle ils appartiennent. Cette graduation a comme « *origine* » l'un des deux points que j'ai allumés au départ et j'appelle l'autre point « *point unité* » de la graduation).

J'appelle **A** le point origine, **B** le point unité et ***d*** la droite de cette graduation.

Ensuite je choisis un point qui n'appartiens pas à ***d***, je l'appelle **C** et j'appelle ***t*** la droite qui passe par **A** et **C**.

Et enfin je demande à un deuxième robot-arpenteur d'allumer les points entiers de la graduation (sur la droite ***t***) qui a comme origine **A** et comme point unité **C** :

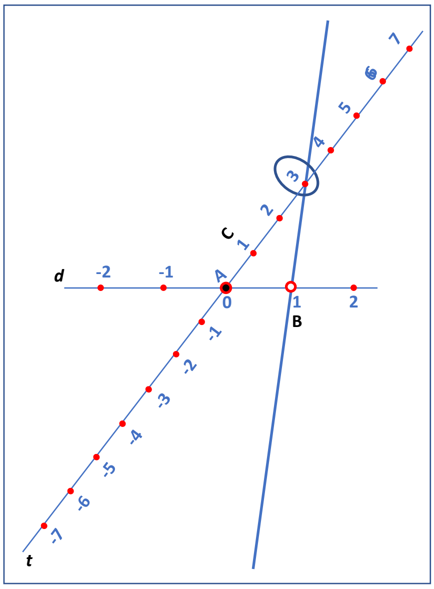


Oui, j'ai *aussi* indiqué les abscisses des points entiers !

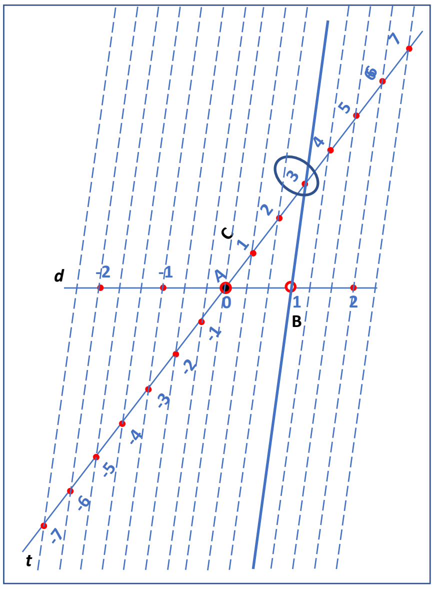
Et c'est (presque) terminé :

voulez-vous allumer deux nouveaux points dans chacun des « petits » segments de ***d*** – donc séparer chacun de ces segments en trois ?

Tout ce que vous avez à faire, c'est imaginer la droite qui passe par **B** et par le point d'abscisse 3 de la droite ***t***…



puis imaginer toutes les droites qui lui sont parallèles et qui passent par les autres points-entiers de ***t*** :

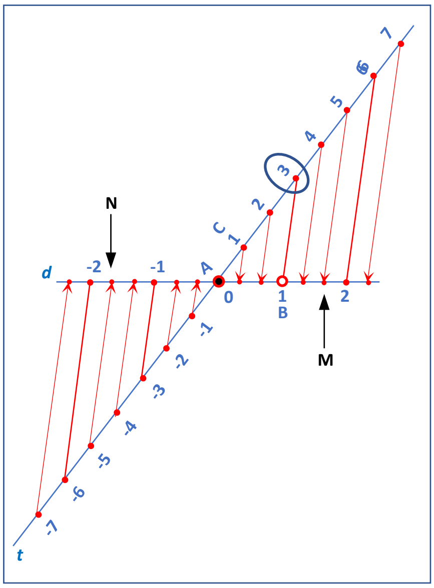


Le théorème des harpes fait le reste 😊 !

Ce n'est pas tout à fait clair ?

D'accord, alors que pensez-vous de ceci :

imaginez maintenant de ne garder de ces droites que les segments compris entre ***d*** et ***t*** et imaginez encore que ces segments sont des fibres optiques infiniment fines qui transmettent la lumière des points-entiers de ***t*** à des points de ***d*** (dont certains, les points-entiers, sont déjà allumés),
par exemple les points **M** et **N** !



C'est mieux ?

Puisque les petits segments de ***t*** ont tous la même longueur, les segments que les droites parallèles découpent sur ***d*** sont également tous la même longueur (oui, une *autre* longueur !)

Et du coup nous avons un allumage de points de ***d*** trois fois plus fin que le précédent !

Et là où tout explose, c'est que si vous préférez un allumage 5 fois plus fin – ou 314 fois plus fin – de ***d*** … il vous suffit de demander aux harpes lumineuses de s'appuyer sur la droite qui passe par **B** et le point de ***t*** d'abscisse 5 – ou 314 !

N'est-ce pas extraordinaire ?

Il ne nous reste plus qu'à associer un nom(bre) « logique » à chacun des nouveaux points allumés.
Lequel ?
Eh bien, par exemple pour **M** : il est allumé par le point *(d'abscisse)* **5** de ***t***
et la harpe engendrée par (les parallèles à la droite qui passe par **B** et) le point *(d'abscisse)* **3** de ***t***
*alors pourquoi pas « cible de point**5** suivant harpe**3** »* … ou plus rapidement **5/3**.
C'est à peu près ce qui s'est fait 😊
*(et comme N est le symétrique de M par rapport à l'origine, son nom(bre) sera **-5/3**)*

Nous pouvons évidemment créer des harpes de lumière dont les cordes sont aussi serrées que nous le souhaitons : chacun des milliards de points entiers positifs de ***t*** (à l'exception de **A**) engendre une harpe dont les milliards de cordes sont moins serrées (et moins penchées) que celles de la harpe engendrée par le point entier positif suivant.

Arrivez-vous à voir ces milliards de harpes aux milliards de cordes plus ou moins penchées, plus ou moins serrées ?
Pour ma part, non, je n'y arrive pas !

Nous atteignons la fin de cet épisode, il serait peut-être temps de préciser que les nombres associés aux milliards de milliards de points allumés par ces harpes lumineuses sont appelés « **nombres rationnels** » ! Et je suppose que cela ne vous étonnera pas que j'appelle « graduation rationnelle de ***d*** » l'extension correspondante de notre « graduation entière de ***d*** » et les points de cette graduation « **points-rationnels de *d*** » ?

(Bien entendu les « points-entiers » de ***d*** font partie de ces « points-rationnels » puisque chacun d'eux est également éclairé – à défaut d'être allumé – par un des points-entiers de ***t***. Mais vous savez certainement que les nombres entiers sont des nombres rationnels particuliers !)

Avons-nous achevé d'allumer la droite ***d*** ?

Non, loin de là (et vous le savez, bien sûr) mais comme le dirait Kipling, ceci est une autre histoire : les points et les nombres irrationnels apparaîtront en temps voulu… et ce temps est encore loin (je ne voudrais pas être désobligeant pour eux mais pour l'instant nous pouvons tout à fait nous en passer) !