Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Tous les épisodes publiés : [*https://www.lesmathscommejelesaime.fr*](https://www.lesmathscommejelesaime.fr)

Les maths comme je les aime /5

Et si les nombres n'étaient que des noms ? 🙄

*(Précision : ce texte, comme les 2,3 ou 4 à venir s'appuie très librement sur l'article « les harpes de Thalès » que j'ai publié sur le site « images des mathématiques (CNRS) ». Très librement parce qu'ici je n'écris pas des maths, je les effleure : **je les raconte… comme je les aime** 😊. Et comme je voudrais les partager avec vous. Mais bien sûr, fondamentalement ce sont les mêmes maths)*

J'ai entendu vos soupirs et vos murmures :

*– vous nous… euh, fatiguez avec votre géométrie, vos points, vos points, vos points ! On veut des **vraies** maths, des maths avec des nombres partout !*

Bon, d'accord, on va s'attaquer aux nombres. À tous les nombres, des entiers aux complexes. Et aux structures numériques qui vont avec. Évidemment, ça va prendre un peu de temps et quelques articles. Mais qui est pressé ?

Les nombres, nous allons les débusquer ensemble, les amener petit à petit à la lumière alors que tout ce qu'ils souhaitent, eux, c'est qu'on les laisse tranquilles, chacun dans son point.

*– Dans son **quoi ?** Vous voulez dire « dans son **coin** » ?*

Euh, oui, oui, bien sûr ! Dans son coin ! Donc nous allons les débusquer. Notez bien, je n'ai pas dit « les créer », ils existent depuis une éternité, un peu – si vous vous rappelez *mon premier épisode* – comme les points qui sont là depuis une éternité et qui attendent qu'un jour un objet ponctuel vienne les visiter. Enfin, si les points attendent ?

– Ah non ! Ne recommencez pas avec vos points !

Je savais bien que j'allais vous fâcher ! Mais je ne peux pas faire autrement parce que ces nombres, c'est justement par les points que je compte les approcher, que *nous* allons les approcher ! Ce n'est pas la méthode habituelle, et alors ? Je l'aime beaucoup… et puis elle est tellement visuelle !

– Hum … et qu'est-ce qu'elle raconte, votre approche-pas-habituelle ?

Qu'observer un nombre, ce n'est en fait qu'observer un point sous un éclairage différent. Ou si vous le préférez que chaque point traîne son nombre derrière lui, comme… son ombre 😊.

Ou encore que tout est une question de lunettes : vous regardez un objet, avec certaines lunettes vous y voyez un point, avec d'autres lunettes vous y voyez un nombre. Si par hasard vous avez lu « *les diviseurs d'un nombre, à partir de son spectre* » – toujours dans *images des mathématiques* – ça vous rappellera peut-être quelque chose ?

– Mais c'est idiot, ce que vous dîtes : on ne peut pas ajouter des points, ni les multiplier ! Toute la construction des structures numériques, vous en faites quoi ?

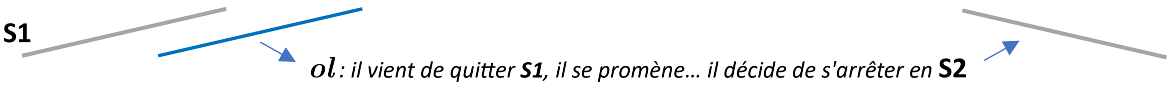
Bien sûr que si, on peut ajouter ou multiplier des points. Et les structures numériques, et bien, elles existent déjà… chez les points.

Bon, c'est clair, si je ne mets pas les… euh, les points sur les « i » ça ne va pas le faire. Alors on fait un essai, vous voulez bien ? **Aujourd'hui vous survolez avec moi une construction *géométrique* des nombres entiers – de *tous* les nombres entiers**… et si je vous ai convaincus, vous aurez peut-être envie de lire les articles suivants (ou peut-être même « les harpes de Thalès » sur image des mathématiques, – mais là ce ne sera plus seulement un survol !)

Vous verrez, ça ne prendra pas beaucoup de temps parce que dans les articles précédents nous avons déjà mis en place presque tout ce qu'il nous faut… Il ne nous manque que la notion de « segments congruents », définie par Hilbert dans son axiomatique. Pas d'affolement, c'est un grand nom pour une idée très simple :

vous observez un segment **S1** (c'est une partie d'une droite, donc un endroit : on ne peut pas le déplacer !)
vous occupez ce segment par un objet linéaire ol : lui, c'est un objet (un fil de fer hyper fin), il peut bouger !

Vous déplacez ol, il occupe (ailleurs) un nouveau segment **S2** :



Et c'est tout : **S1** et **S2** sont deux segments congruents 😊

Oui, ça ressemble à une façon compliquée de dire qu'ils sont « égaux ». Mais en maths « égaux » a un sens très précis : « **S1** égale **S2** » signifierait que **S1** et **S2** sont deux noms différents d'un même objet (objet au sens mathématique c'est-à-dire à peu près n'importe quoi de suffisamment défini : un endroit est un objet !)… mais **S1** et **S2** ne sont *pas* le même objet : ce sont deux endroits différents ! Donc ces deux segments ne sont *pas* « égaux » !

Bien sûr j'aurais pu dire « **S1** et **S2** sont deux segments qui ont la même longueur » – mais une longueur c'est une mesure, une mesure utilise des nombres… et ces nombres, nous ne les avons pas encore débusqués !
Vous voulez un peu d'aspirine ?

Vous êtes prêt(e)s ? C'est parti : nous savons *plein* de choses sur les points, les droites, les segments (congruents ou non)… mais nous n'avons *jamais* entendu parler de nombres.

Maintenant, ***imaginez*** (parce que bien sûr tout se passe dans la tête !) :

vous êtes plongé(e)s dans un univers géométrique, un univers de points.
Vous choisissez deux points de cet univers, vous les appelez **A** et **B**. Non, vous ne les voyez pas, des points ne sont que des endroits.

Imaginez la droite qui contient (« passe par ») ces deux points : appelez-la ***d***. Non, vous ne la voyez pas non plus, une droite n'est également qu'un endroit. Mais comme il est extrêmement difficile de focaliser sa pensée sur des objets invisibles vous allez faire comme tout le monde : vous allez *prétendre* voir **A**, **B** et ***d***, et pour vous y aider, je les représenterai par des taches et des traits colorés sur un fond blanc (comme je l'ai fait pour S1 et S2) :

Toutefois puisque vous imaginez, allez encore plus loin, imaginez que votre univers géométrique est un néant noir dont vous avez le pouvoir d'illuminer, « d'allumer » les points que vous choisissez en leur injectant des objets ponctuels brillants (des objets que vous pourrez ensuite au choix allumer ou éteindre).

Et convenons encore d'un principe : dans ce néant noir je représenterai les points « allumés » en rouge et les autres éléments dans une quelconque couleur différente – ils ne sont là que pour aider notre imagination, la guider (lorsque nous regardons la Grande Ourse, nous n'en voyons que les étoiles, n'est-ce pas ?)

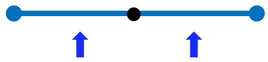
Et maintenant, j'allume les points **A** et **B** :

Idéalement, il faudrait vous imaginer face à une immensité noire d'où surgissent deux points allumés… qui seront les deux premières étoiles de l'univers des points – et des nombres – entiers. Les autres points s'allumeront bientôt 😊 !

Je décide d'appeler **A** « **point entier origine de *d*** » et de nommer **B** « **successeur de A sur *d*** »
… et donc logiquement **A « prédécesseur de B sur *d* »** !

Et OUI : j'aurais pu décider que le point entier origine de *d* serait B et que A serait son successeur… c'est juste mon choix !

Voilà, vous avez fait le plus difficile, je vous propose de laisser l'IA prendre le relais avec un petit ***robot-arpenteur,*** rien de bien compliqué :

au cœur de l'*arpenteur*, il y a ce double-segment : 

Chacun des deux « petits » segments est congruent au segment [AB]

(encore une façon tordue de dire également que le point en noir est le milieu du segment… mais la notion de milieu repose sur celle de longueur – et donc de nombres, que nous ne connaissons toujours pas 😊)

… puis un objet-linéaire-segment en deux couleurs, construit à partir de ce segment et équipé de trois viseurs. Mais contrairement au segment, lui, il peut se déplacer :

L'*arpenteur* bicolore

(le noir n'est pas une couleur

… et enfin un programme pas trop compliqué :

- l'*arpenteur* se déplace à sa guise le long d'une droite parallèle à *d* :
- Lorsque deux de ses viseurs indiquent deux points allumés de *d*,
  Il allume (si ce n'est pas déjà fait) le point de *d* indiqué par le troisième viseur :

  si ce troisième viseur est le bleu,
  nous dirons que le point qu'il indique est le prédécesseur de celui indiqué par le viseur noir,

  si ce troisième viseur est le vert,
  nous dirons que le point qu'il indique est le successeur de celui indiqué par le viseur noir

  (… et si ce troisième viseur est le noir nous ne dirons rien : le point qu'il indique est déjà allumé 😊)
- Il doit allumer chaque jour au moins deux nouveaux points, l'un d'un côté de A, l'autre de l'autre côté… mais ça, c'est juste pour l'obliger à travailler un peu !

Et c'est tout ! *(Ça n'a l'air de rien, n'est-ce pas ? Pourtant nous venons d'installer tout le décor des « points entiers »… et de leurs nombres !)*

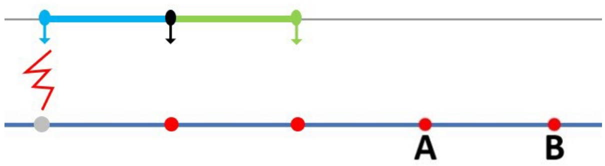
Mais ***pourquoi*** applique-t-il ce programme ? Il n'en sait rien évidemment. S'il avait lu le Petit Prince – et s'il pouvait parler – il nous dirait « c'est la consigne » comme un lointain ancêtre humain à lui, allumeur de réverbères de son métier.

D'ailleurs, peut-être en a-t-il entendu parler, peut-être le plaint-il, lui qui n'est soumis à aucun horaire, aucun rythme, (presque) aucune progression même : il peut à tout moment avancer ou reculer jusqu'où il en a envie, ou ne rien faire, juste se demander par exemple si son travail aura une fin (et espérer que non : il lui laisse énormément de temps pour réfléchir).

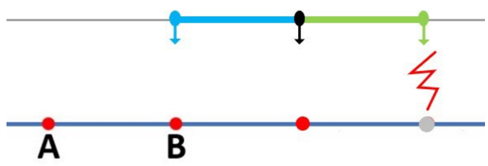
(Avancer ? Reculer ? Il n'y a pas de sens sur une droite mais puisque j'ai décidé d'appeler B le « successeur de A sur d » et puisque « succéder » fait souvent penser à « avancer dans le temps », nous pouvons décider que pour l'arpenteur, « avancer » signifie « aller vers les successeurs »)

Ensuite bien sûr, on laisse l'*arpenteur* travailler *(ici, il a déjà allumé 3 points, il en allume 2 nouveaux)* :

d'un côté de A …



… de l'autre côté 😊



Et voici nos « points-entiers »… enfin, quelques-uns :

(Imaginez-les sur fond noir, vous ne voyez plus ni A ni B ni d, juste un immense ruban d'étoiles dans votre univers géométrique !)

– D'accord, d'accord, c'est très joli tout ça mais où sont les nombres là-dedans ? ***L e s   n o m b r e s   ???***

Mais pourquoi vous vous énervez ? J'y arrive, aux nombres !

Reprenons notre ruban de points entiers, avec cette fois-ci quelques indications en noir : A, B et les noms que je donne à deux autres points, M et T :

•   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •

T   **A**   **B**   M

(Pourquoi ces points-là ? Je ne sais pas trop : sur une carte, ça pourrait être les maisons de deux amis, le long d'une route ?)

Maintenant, imaginez que d'autres personnes ont cette carte devant les yeux, avec les points A et B déjà marqués. Elles ne me voient pas, comment pourrais-je leur désigner par écrit les points que j'ai appelés M et T ?

Je pourrais évidemment m'appuyer sur des lettres, ou même des mots, par exemple : « écris le mot ABSOLUMENT depuis AB… et arrête-toi à M : AbsoluM … puis termine le mot à l'envers en partant de A : TneA ».
Mais c'est tout de même un peu tordu, non ? Ça fait vraiment chasse au trésor !

Je pourrais aussi, ce serait déjà plus raisonnable, leur écrire :
« va de A à B puis avance d'un point, et encore d'un, et encore, et encore, et encore. Stop ! Tu as atteint M. »

Mais si M était un point vraiment très loin de A et B vous imaginez le nombre de pages ?

Je pourrais également symboliser les segments successifs nécessaires pour atteindre M ou T **depuis A**, par exemple comme ceci :

A – B – – – – – M   et pour T :   T – – – A –B

Et si je veux gagner encore de la place, faire savoir à ces autres personnes que **je pars *toujours* de A**, remplacer le bloc « A – B » par une flèche pour dire si je vais de A vers B ou dans l'autre sens et ne plus écrire ni M ni T :

pour M : → – – – – –   et pour T : ← – – –

Ou même décider que si je vais « vers l'avant » je ne marque rien :

pour M : – – – – –   et pour T : ← – – –

Bon, je ne vais pas insister, vous comprenez le principe :

en décidant de symboliser les segments par des traits verticaux (ça prend moins de place) on arrive rapidement à quelque chose qui préfigure l'écriture romaine des nombres !

(Pour leur écriture arabe, je vous proposerai très bientôt deux « histoires du père Colliard » :
« Hi-Ati, la création des chiffres », puis « Hi-Ati, la création des dizaines »… deux histoires tout à fait fausses 😊 *!)*

Bref, après des siècles d'errances tout le monde a fini par se mettre d'accord sur quelque chose comme ça :

•   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •   •

-7   -6   -5   -4   -3   -2   -1   0   1   2   3   4   5   6   7   8

Les nombres entiers ne seraient donc que des étiquettes accolées à des points entiers d'une droite, des noms de code de ces points, construits à l'aide d'un algorithme logique qui permet de les situer rapidement par rapport aux deux points choisis pour construire cette succession de points entiers de la droite. De les *identifier*.

***   ***   ***

Ce n'est qu'une histoire, vous le savez bien : ce n'est pas en suivant le chemin de cet article que les nombres entiers ont été débusqués et si j'ai pu vous en présenter cette approche c'est uniquement parce que de très grands esprits ont longuement peiné pour transformer en un jardin de tout repos ce qui était une jungle pleine de ronces.

Mais en quoi cette approche peut-elle être intéressante ? Deux raisons principales :

*il s'agit d'une approche globale **et** elle ne singularise aucun point de la droite.*
(Pour paraphraser George Orwell : tous les points d'une droite sont égaux, il n'y a pas de raison que « certains soient plus égaux que d'autres » !)

Elle ne singularise aucun point de la droite *en ce sens que nous ne partons pas d'un point exceptionnel :*

une droite n'a ni point de départ ni sens privilégié : les points A et B que j'ai choisis auraient tout à fait pu être deux autres points successifs de mon ruban de points entiers sans que cela change le ruban – juste l'identification numérique de ses points.

(Et si – mais cela nous amènerait trop loin – je changeais « l'écart » entre mon point-origine et son successeur, je n'obtiendrais bien sûr plus le même ruban de points entiers mais en me rapprochant ou en m'éloignant de la droite (en « zoomant ») je retrouverais la même répartition visuelle.)

Elle est globale *:*

J'y observe dès le début la droite dans son ensemble : il n'y a pas de séparation artificielle entre des points entiers dont l'essence serait différente – positive ou négative : un point est un point !

Et comme vous le verrez (éventuellement 😊) dans les articles suivants, il n'y aura pas non plus de séparation artificielle entre des points (et des nombres) entiers, rationnels, réels :

parce qu'il s'agira d'opérations géométriques – entre points de la droite – et de démonstrations géométriques de leurs propriétés, les opérations que j'introduirai bientôt seront conçues dès le début pour s'appliquer dans les mêmes conditions à tous les points de la droite (que nous les ayons déjà « débusqués » ou non)… puis très simplement transposées aux nombres associés à ces points.

(Je n'aurai donc pas besoin « d'inventer » des opérations spécifiques aux entiers naturels puis de réfléchir ensuite à comment les étendre aux entiers relatifs, puis aux nombres rationnels, puis encore aux nombres réels)