Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Tous les épisodes publiés : https://www.lesmathscommejelesaime.fr

Les maths comme je les aime /4

Le PLAN, une « invention » incontournable !

Incontournable, le plan ? Oui, parce qu'il est l'un des trois éléments de base de la géométrie d'Euclide (et 22 siècles plus tard de Hilbert) : le point, la droite, le plan ! Ce que j'ai écrit pour la droite, c'est tout aussi vrai pour lui : sans lui, la géométrie euclidienne n'irait pas bien loin ! (Sans le point non plus, bien sûr mais ça, si après tous les épisodes précédents vous n'en êtes pas persuadé(e)s, j'abandonne !)

Mais le plan est incontournable pour une autre raison également… j'y reviendrai bientôt 😊

Bon, si nous commencions par le commencement ? Pour inventer le plan, nous allons avoir besoin des droites (ça, c'était l'épisode /3)… et des surfaces. Je ne vous ai encore rien raconté sur les surfaces et je n'ai pas trop envie d'y consacrer tout un épisode alors vous voulez bien qu'on se contente d'un paragraphe 0 dans cet épisode-ci ? C'est parti !

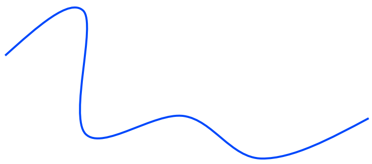
– Eh, pourquoi vous nous demandez notre avis si vous n'attendez même pas notre réponse ? Mais oui d'accord, nous voulons bien !

– Merci… et vous avez raison, j'aurais dû l'attendre ! Je veux toujours aller trop vite !

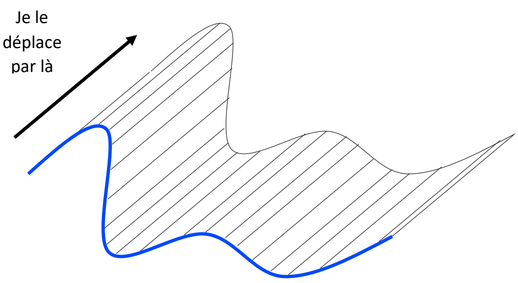
Qu'est-ce qu'une surface ?

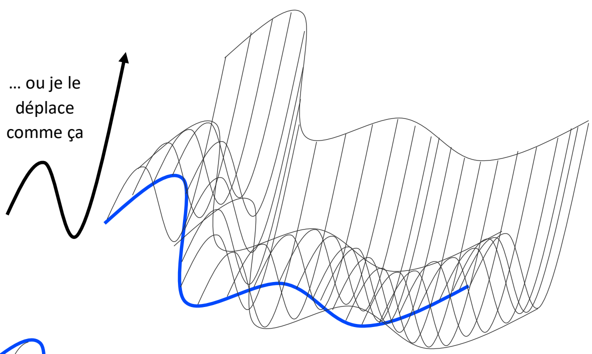
Vous-vous rappelez (*épisode /2*) qu'une ligne est un ensemble de points : le trajet d'un objet ponctuel ? Pardon, je radote. Mais aussi, l'histoire se répète tellement : **une surface**, elle, **est le trajet d'un objet *linéaire*** ! (Comme les lignes, les surfaces sont des ensembles de points, donc des endroits.)

Dans l'épisode /3 j'ai créé un objet linéaire et je l'ai déplacé pour qu'il passe de plusieurs façons différentes par deux points que j'avais choisis : ce qui m'intéressait, ce n'était pas comment il se déplaçait mais seulement sa position de départ et celle d'arrivée.

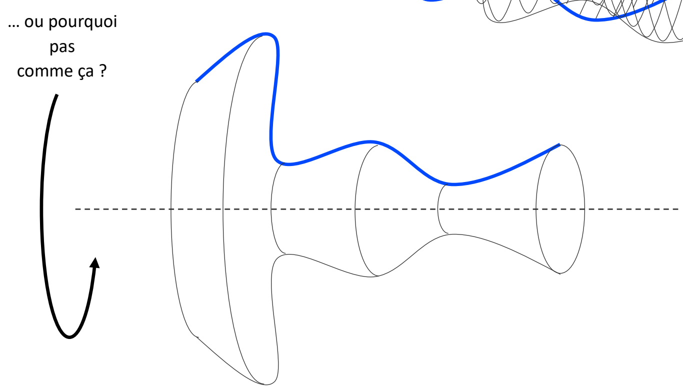


Mais aujourd'hui je vais m'intéresser à l'ensemble des points qu'il traverse pendant ses déplacements (pour visualiser cet ensemble, imaginez que l'objet linéaire « laisse une trace » dans chacun de ces points) :





Une surface, c'est ça !



*Vous le savez bien, ici **je raconte les maths** :*

je ne cherche donc pas à définir rigoureusement la notion de surface (certaines surfaces, vraiment très énervantes, ne peuvent pas être engendrées par le déplacement d'un objet linéaire)…

juste à donner une idée (superficielle ☺) de ce que c'est !

« Inventer » le plan.

Un plan est une surface : l'ensemble des points traversés par un *oldi* (un ***o**bjet **l**inéaire **d**roit **i**llimité*, vous vous rappelez ce que c'est, n'est-ce pas ? Sinon… retour à l'épisode /3 😊) à qui on impose un déplacement bien choisi.

Quel déplacement ? En fait, il y a plusieurs possibilités : la plupart d'entre elles nécessitent plusieurs oldis… et en plus ils finissent par s'échapper ! Il est possible de se contenter d'un seul oldi – et de ne pas le perdre mais ça complique un peu les dessins alors je vais vous proposer la possibilité la plus traditionnelle : c'est aussi la plus gourmande en oldis (elle en perd 4 !) mais elle est vraiment claire. D'accord ?

– Euh, là vous attendez vraiment notre réponse ? Ça c'est bien ! Alors oui, d'accord… mais vous pourrez quand même nous montrer ensuite vite fait comment vous y arrivez avec un seul oldi – et sans même le perdre ?

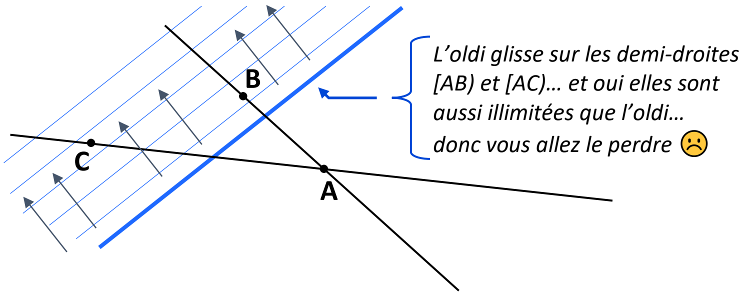
– Vous voyez que je vous écoute ! Bon d'accord, mais vite fait, juste le principe !

C'est parti pour la méthode traditionnelle :

vous choisissez trois points de l'espace (je vais les appeler A, B et C) et vous imaginez les droites (AB) et (AC). Je vais les tracer en noir :

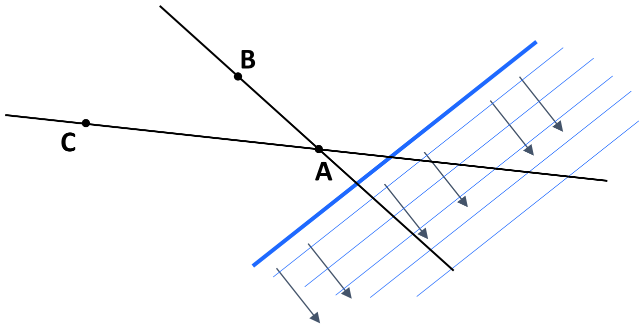
Puis vous déplacez un *OLDI* de façon à ce qu'il reste en contact avec 2 des 4 demi-droites d'origine A

comme ça (imaginez qu'il glisse comme sur 2 rails) :



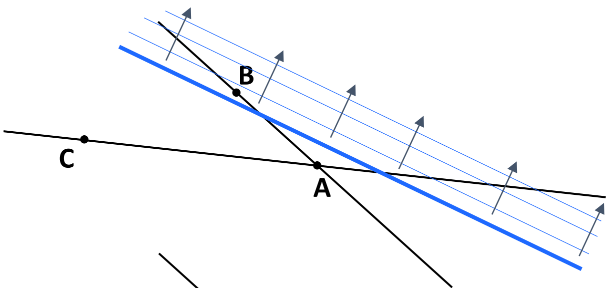
Puis un 2ème *OLDI*, comme ça :

(*et naturellement vous allez **aussi** le perdre* ☹)



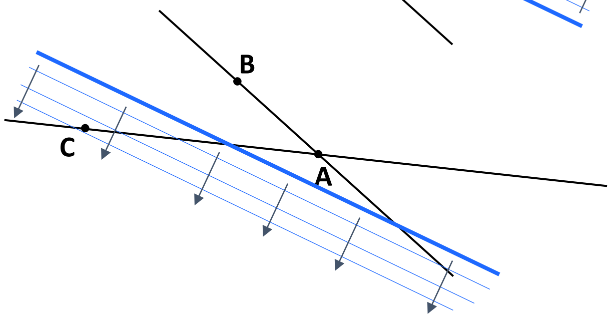
… un 3ème, comme ça :

(*tout comme celui-là* ☹)

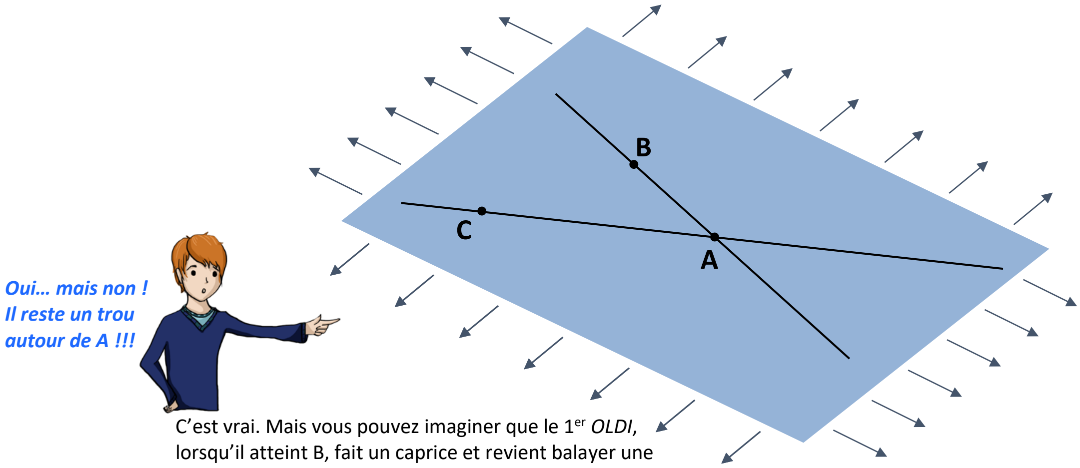


… et enfin un 4ème, comme ça :

(*et comme ce dernier* ☹)



Mais finalement, si vous vous rappelez qu'une droite est illimitée (et les *OLDI*s également), les points traversés par vos quatre oldis en route vers l'infini forment une surface immense, une surface sans creux ni bosses : **un plan** !



C'est vrai. Mais vous pouvez imaginer que le 1er *OLDI*, lorsqu'il atteint B, fait un caprice et revient balayer une partie de la demi-droite [CA), en pivotant autour de B, comme l'*OLDI* rouge. Juste ce qu'il faut pour combler le trou… Ensuite, il reprend sa position initiale et son chemin.

Sans creux ni bosses ? Ça se « voit » bien mais le démontrer est un peu plus compliqué. Mais ici, je raconte, je ne démontre pas, n'est-ce pas, alors ce n'est pas bien grave 😊 !

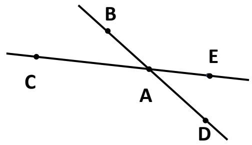
– D'accord… et l'autre méthode, celle avec un seul oldi ? Un oldi qu'on ne perd pas ? Tous ces oldis perdus, c'est un peu triste, non ?

– Décidément vous avez de la suite dans les idées ! Mais vraiment vite fait, il y a encore une chose ou deux que je voudrais vous raconter. Et je ne vais pas hachurer les zones traversées par l'oldi, juste vous indiquer ses mouvements.

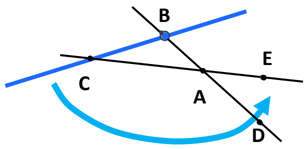
C'est parti ! Le plan, 2ème version :

Partez des 3 points A, B et C que vous connaissez déjà,
imaginez les droites (AB) et (AC) et 2 nouveaux points :

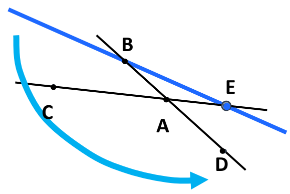
D sur (AB) et E sur (AC), tels que A soit entre C et E, et entre B et D.



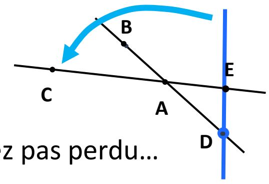
Placez votre *OLDI* de façon à ce qu'il passe par B et C,
puis, sans quitter B (il pivote dessus), faites-le glisser de C à E
tout le long du segment [CE]



Ensuite, sans quitter E, faites-le glisser de B à D,
tout le long du segment [BD]



… et enfin, sans quitter D, faites-le glisser de E à C
tout le long du segment [EC]



Et voilà. Maintenant, vous pouvez ranger votre *OLDI*, vous ne l'avez pas perdu…
Et il a bien engendré le même plan que les *OLDI*s précédents.

Bon, on a encore quelques minutes alors pour les accros (s'il y en a) juste un coup d'œil à une méthode très différente :

J'aurais pu tenter d'étendre à la définition du plan le principe de ma définition de la droite.

Un plan serait alors l'ensemble des points traversés par un objet *surfacique* particulier qui, quelle que soit sa façon de se déplacer sans quitter les points A, B et C occuperait toujours exactement le même endroit de l'espace.

Cette définition aurait eu l'avantage de bien mettre en évidence que 3 points (non alignés) définissent un plan.

Je ne l'ai pas fait parce que si la droite est le seul objet linéaire qui peut « coulisser » à travers 2 points choisis tout en gardant exactement la même position dans l'espace, le plan, lui, n'est pas le seul objet surfacique à pouvoir coulisser à travers 3 points A, B et C choisis sans changer d'endroit : la sphère qui a comme « grand cercle » le cercle circonscrit au triangle ABC a également cette propriété particulière.
(Le problème apparaissait en germe avec la droite : 2 points A et B étant choisis, l'objet linéaire droit illimité n'est pas tout à fait le seul objet linéaire qui, quelle que soit sa façon d'occuper A et B ne change pas d'endroit. Pourquoi ? Parce que c'est encore vrai pour un objet linéaire qui occupe exactement le segment [AB] : il n'a de toute façon pas le choix, il ne peut pas bouger ! Je m'étais tiré de cette difficulté en imposant à mon objet linéaire droit de *traverser* A et B – de « coulisser » à travers eux 😊)

Fin de la minute-pour-accros… et de l'épisode.

– Ah non, vous n'oubliez pas quelque chose ? Ce que vous avez écrit tout au début :

« Mais le plan est incontournable pour une autre raison également… j'y reviendrai bientôt »

– Oups ! Très juste ! Alors encore quelques lignes :

Le plan est doublement incontournable. Pour sa position dominante en géométrie, ça je l'ai déjà dit… mais aussi pour sa position tout court dans l'univers, une position plutôt effrayante : en cours de maths, tout le monde trouve banal de dire « je trace le plan $\mathscr{P}$ »… ou « observez le plan qui passe par le point A et la droite d », par exemple. Mais ce que nous traçons – ou ce que nous observons – n'est qu'une minuscule partie d'un plan :

Un plan sépare notre univers en deux. Tout notre univers : si vous êtes d'un côté de ce plan et que vous voulez passer de l'autre côté, vous n'avez pas le choix, vous devez le traverser. Un plan est *physiquement* incontournable.

– Mais pourquoi c'est effrayant ?

– Oui, bon, là je me suis peut-être un peu emballé parce qu'un plan, ce n'est jamais qu'un endroit. Mais imaginez juste une seconde qu'on puisse vous interdire de le traverser ? Heureusement, autrement que par magie, ça paraît assez peu vraisemblable… et bien que mathémagique.com édite mes livres, je n'ai jamais enseigné à Poudlard 😊

et

: **[mes livres sont disponibles à la]** fnac