Philippe Colliard
www.colliard.fr/philippe

Les maths comme je les aime /3

… après, c'est toujours tout droit !

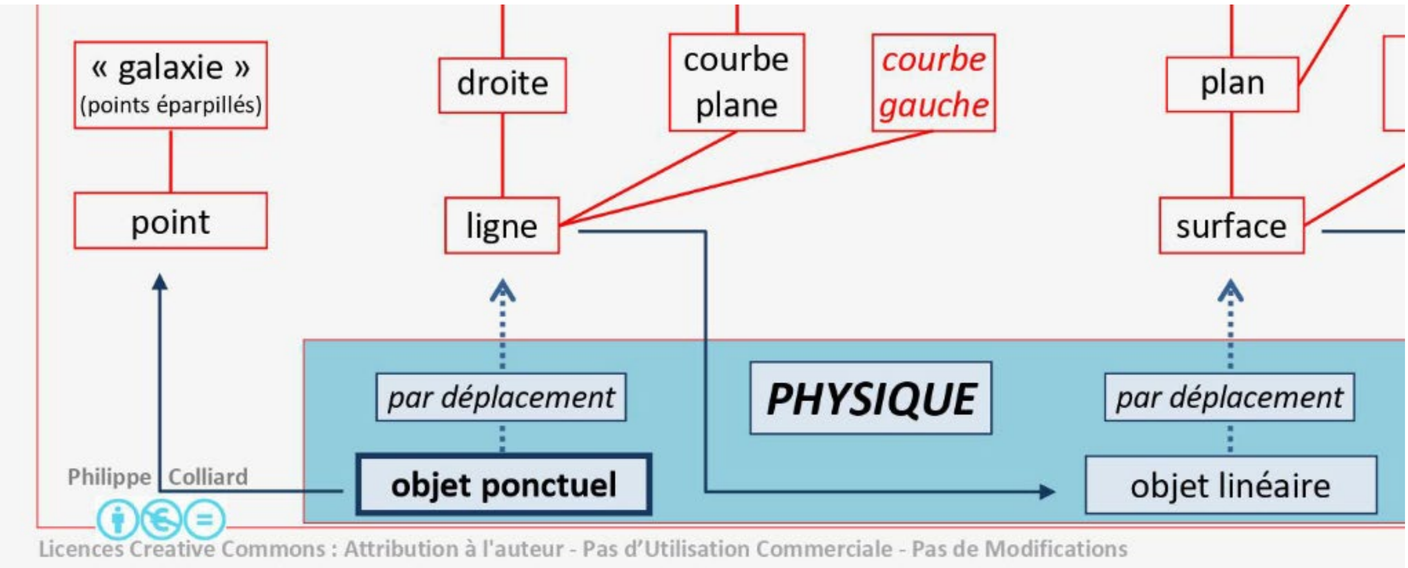
Pourquoi me suis-je tellement attardé sur l'objet ponctuel, le point, la ligne ? Parce que ce sont les éléments de base de la géométrie, bien sûr… mais tout particulièrement parce que ce sont les « parents » de la droite. Et sans droite, la géométrie euclidienne n'irait pas bien loin !

Comment dites-vous ? La droite, c'est facile, c'est une ligne qui va tout droit ?

Soupir : d'abord une ligne c'est un endroit, ça ne va nulle part…
et ensuite un objet qui « va tout droit », qu'est-ce que ça veut dire ? Dans notre univers physique, à part les photons, il n'y a pas beaucoup d'objets qui vont toujours tout droit (et même les photons peuvent dévier) !

Inventer la droite ?

Bon, ce n'est pas nouveau, la géométrie ***imagine*** !
Elle repose sur un *jeu de construction* d'abstractions, d'idéalisations de notre univers physique :



(«… Donc, d'après… » : https://donc-dapres.com/)

Alors, la droite ?

C'est parti ! Enfin presque, il me manque encore un petit bout d'abstraction, un nouvel objet imaginaire, l'***objet linéaire*** (là, tout en bas à droite de la capture d'écran ! 😊). Avec une mise en garde : ici, « linéaire » n'a pas le sens mathématique traditionnel qu'on retrouve dans « algèbre linéaire » et « transformations linéaires » (où « linéaire » évoque des *droites*) – mais simplement son sens étymologique, « associé à la notion de *ligne* (*linea*, en latin) » !

Bref… une toute dernière étape avant d'arriver à la droite :

-) qu'est-ce qu'un objet linéaire ?

Vous vous rappelez *évidemment* qu'une ligne est un ensemble de points : le trajet d'un objet ponctuel ?

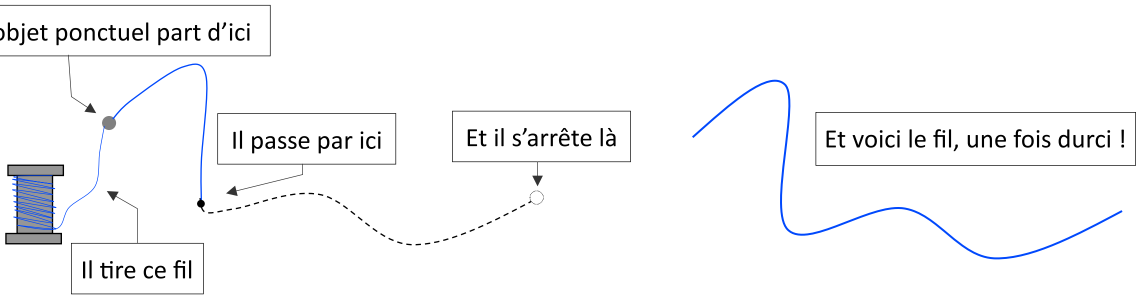
Imaginez maintenant que l'objet ponctuel, en se déplaçant, entraîne derrière lui un fil très fin… vraiment très très fin ! Encore plus fin que ça ! Un fil *de l'épaisseur d'un point*.

Un fil **imaginaire**, bien sûr.

Ce fil matérialise le trajet de l'objet ponctuel : il occupe l'ensemble des points traversés par cet objet.

Et si ce fil, au bout de quelques secondes, durcissait et devenait rigide ?

Vous auriez un objet en forme de ligne – et *pas plus gros qu'une ligne* !
Un objet que vous pourriez, à son tour, déplacer :



C'est ça, un objet linéaire !
(« linéaire » pour rappeler qu'il occupe une ligne 😉)

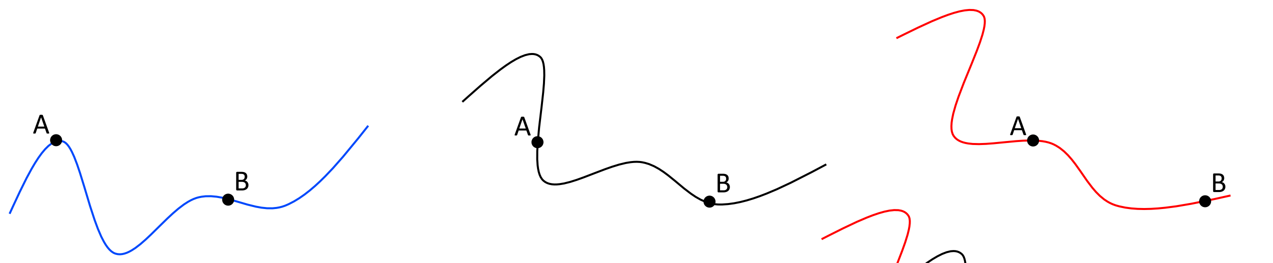
Vous aviez déjà l'objet ponctuel, vous voilà avec un objet linéaire !

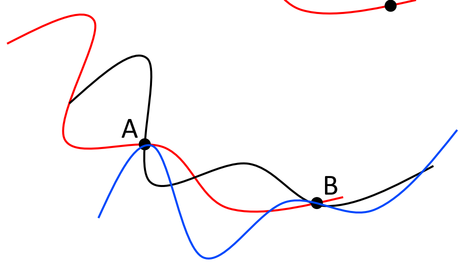
Qu'allez-vous en faire ? Le déplacer, évidemment 😁

-) De l'objet linéaire à la droite.

Marquez deux points, A et B, sur une feuille. Vous voulez déposer votre objet linéaire de façon qu'il *traverse* ces deux points. Vous pouvez y arriver de plein de façons différentes,

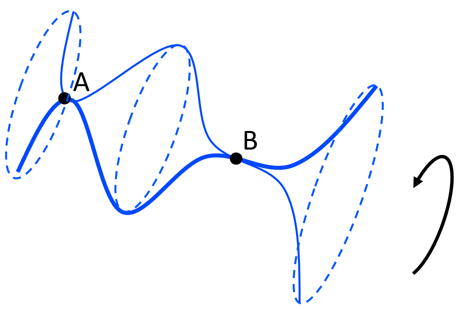
par exemple comme ça... : ... comme ça... : ... comme ça... :





Si je regroupe ces trois façons
j'obtiens un très joli dessin...
qui met en évidence 3 ensembles *différents* de points :
les points occupés par l'objet linéaire dépendent de sa position !

Et c'est encore plus clair « dans l'espace » :
après tout, n'est-ce pas, nous vivons dans un espace de dimension trois (au moins 🙄), nous ne glissons pas sur une feuille de papier... alors *imaginez* que les points A et B flottent dans l'espace devant vous et que par une technique quelconque vous avez obtenu que votre objet linéaire *doive les traverser* (et, juste pour simplifier le dessin, toujours aux mêmes endroits de l'objet). Alors, si vous lui donnez une délicate poussée (c'est fragile, un objet linéaire !) il va jouer les toupies et occuper l'une après l'autre des centaines de lignes différentes :



J'ai écrit « des centaines » pour n'inquiéter personne
mais vous savez bien qu'en fait c'est la même histoire
que pour la question « *combien y a-t-il de points d'une ligne entre deux points de cette ligne* ? » du billet précédent (vous tracez une ligne ou un trait ?) :

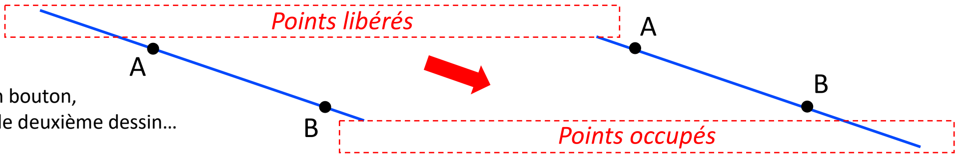
votre objet linéaire, ce n'est pas quelque centaines de lignes
qu'il va occuper successivement mais une infinité !

Et bien maintenant, **nous allons imaginer un objet linéaire pas comme les autres**, un objet linéaire qui, lorsqu'il est « piégé » par deux points de l'espace qu'il doit constamment *traverser* peut se démener autant qu'il voudra, coulisser ou virevolter, il occupera toujours ***exactement*** la même ligne !

Cet objet linéaire particulier, ce fil hyper-fin ne peut avoir ni creux ni bosses sinon, comme dans le dessin d'au-dessus, il pourra occuper une infinité de lignes dont certaines parties au moins seront différentes.
Appelons-le un « **o**bjet **l**inéaire **d**roit » (« droit » par opposition à « tordu » 😊), ou « ***old*** ».

Cet *old* ne peut pas non plus être limité sinon lorsqu'il coulissera à travers les deux points il libérera certains des points qu'il occupait au profit de nouveaux points, qu'il n'occupait pas avant – il n'occupera donc plus *exactement* la même ligne :

Ceci n'est évidemment qu'un schéma :
il n'y a qu'un seul point A, un seul point B
et un seul *old* (en bleu) ! Pour être parfait,
j'aurais dû créer une animation qui, en cliquant sur un bouton,
aurait fait apparaître au même endroit le premier ou le deuxième dessin…
mais je ne suis *pas* parfait !



Donc parmi tous les objets linéaires qui traversent deux points choisis, le seul qui – quelle que soit sa position – occupe toujours exactement la même ligne est un « **o**bjet **l**inéaire **d**roit **i**llimité »… un « ***oldi*** » !

Et la droite, dans tout ça ? Non, ne me dites pas que ce n'est pas évident, maintenant :

la droite définie par les deux points A et B est la ligne occupée par l'*oldi* qui passe par ces deux points…
et non, je ne la dessinerai pas parce qu'elle est illimitée 😁 !!!

* * * * * *

Une première précision : *comme tous les objets linéaires, l'**oldi** est imaginaire – et son nom n'est pas, mais absolument pas officiel. Mais il m'a amusé alors je l'ai gardé.*

Une deuxième précision : *les différentes versions de l'axiomatique d'Euclide définissent le segment **puis** le prolongent en droite. J'ai plutôt tendance à aller du général au particulier (et je le ferai bientôt à nouveau à propos des ensembles d'entiers)... mais cette interprétation très personnelle des maths n'est vraiment que cela, une interprétation imagée, à vocation pédagogique, des axiomatiques d'Euclide et de Hilbert.*

et

: **mes livres sont disponibles à la** fnac